



Zadanie programowania liniowego PL

$$\max f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach: $\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\dim \mathbf{x} = n, \dim \mathbf{c} = n$$

Macierze $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ odpowiadają za współczynniki w m_1 i m_2 ograniczeniach

$$\dim \mathbf{A}_1 = [m_1 \times n], \dim \mathbf{A}_2 = [m_2 \times n]$$

Wektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ odpowiadają za prawe strony ograniczeń

$$\dim \mathbf{b}_1 = m_1, \dim \mathbf{b}_2 = m_2$$

Postać kanoniczna zadania PL

$$\max_{x \in X} x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

Twierdzenie 4 Kronecker'a-Capell'ego

Układ równań liniowych $Ax=b$

gdzie: A jest macierzą $m \times n$, $\dim x = n$ oraz $\dim b = m$

ma rozwiązanie $x \in R^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy rozszerzonej $A_r = [A, b]$ jest równy rzędowi macierzy A .

$$rz[A_r] = rz[A]$$

Lemat

Jeśli dla układu równań liniowych $Ax=b$ spełniony jest warunek $\text{rz}[A_r]=\text{rz}[A]$ to mogą zaistnieć trzy następujące przypadki:

1. $\text{rz}(A) = m = n$ istnieje jedno rozwiązanie układu $Ax=b$.
2. $\text{rz}(A) = n < m$ istnieje jedno rozwiązanie układu równań, lecz przy tym $(m - n)$ równań jest zbędnych.
3. $\text{rz}(A) = m < n$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań układu $Ax=b$, jest to układ nieoznaczony.

Definicja macierzy bazowej B

Macierzą bazową B układu równań $Ax = B (A) = m, n>m$ nazywamy nieosobliwą macierz kwadratową o wymiarach $m \times m$ utworzoną z liniowo-niezależnych kolumn a^j macierzy A.

Definicja rozwiązania bazowego

Rozwiązaniem bazowym układu równań $Ax=B (A)=m, n>m$ nazywamy wektor $x_b=B^{-1}b$ utworzony ze zmiennych odpowiadających kolumnom a^j macierzy bazowej B.

Składowe wektora bazowego x_b to są zmienne bazowe.

Rozwiązania bazowe

Definicja:

Rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym zadania PL

jeśli wektor x_B jest nieujemny tzn. $x_B \geq 0$

Wówczas rozwiązanie bazowe dopuszczalne posiada nie więcej niż m dodatnich x_i .

Definicja:

Niezdegenerowanym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym zadania PL

nazywamy rozwiązanie dopuszczalne, w którym nie wszystkie składowe x_i są większe od zera.



Extremum zadania PL

Twierdzenie 5

Zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych zadania PL jest zbiorem wypukłym.

Definicja:

Punkt x należący do wypukłego zbioru $X \subset R^n$ jest punktem wierzchołkowym zbioru X , jeśli nie może być wyrażony jako kombinacja liniowa innych punktów zbioru X .

Twierdzenie 6

1. Funkcja celu zadania PL przyjmuje wartość maksymalną w punkcie wierzchołkowym zbioru rozwiązań dopuszczalnych zadania PL.
2. Jeśli funkcja celu zadania PL przyjmuje wartość maksymalną w więcej niż jednym punkcie wierzchołkowym, to ma tę samą wartość dla każdej kombinacji wypukłej tych punktów.



Twierdzenia PL II

Twierdzenie 7

Niech będzie dany układ równań liniowych

$$Ax=B$$

gdzie jest macierzą $m \times n$, $\dim x=m$, $(A)=m$, $n>m$. Jeśli istnieje rozwiązanie dopuszczalne układu równań tzn. takie, że $x>0$ to istnieje również bazowe rozwiązanie dopuszczalne tzn. $x=[x_B,0]$

Twierdzenie 8

Rozwiązanie dopuszczalne x zadania programowania liniowego jest punktem wierzchołkowym zbioru rozwiązań dopuszczalnych X_{OL} wtedy i tylko wtedy gdy odpowiada mu bazowe rozwiązanie dopuszczalne tzn. $x=[x_B,0]$



Podsumowanie

- Istnieje punkt wierzchołkowy zbioru X w którym funkcja celu zadania PL przyjmuje maksimum
- Każde bazowe rozwiązanie dopuszczalne jest punktem wierzchołkowym zbioru X .
- Każdemu punktowi wierzchołkowemu zbioru X odpowiada m wektorów liniowo niezależnych z danego zbioru n wektorów związanych z tym punktem.



Rozwiązania optymalne

Twierdzenie 9

Jeśli zadanie programowania liniowego PL posiada rozwiązanie optymalne i wszystkie rozwiązania bazowe są niezdegenerowane to za pomocą algorytmu simpleks uzyskuje się rozwiązanie optymalne po co najwyżej

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

iteracjach.

Pierwsze rozwiązanie bazowe

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$x_0 = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N) x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_B B^{-1}N - c_N \\ B^{-1}N \end{bmatrix} x_N$$