

Programowanie liniowe całkowitoliczbowe

PCL Metodologia podziału i oszacowań – Branch and Bound Technique (B&B)

$$\begin{aligned}\max \quad & x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in C\end{aligned}$$

- Podstawą metodologii B&B jest przegląd drzewa rozwiązań.
- Wykorzystuje się fakt skończoności zbioru możliwych wartości zmiennych całkowitoliczbowych w przypadku ograniczonych zadań PCL.
- Etapy metody: -podział
-gałęzienie
-obliczanie górnych i dolnych oszacowań
funkcji celu.

$$S_j = \{x \mid A^j x = b^j, x \geq 0 \text{ i całkowitoliczbowy}\},$$

Oslabienie, które prowadzi do zadania PL:

$$T_j = \{x \mid A^j x = b^j, x \geq 0\}$$

$$T_j \supseteq S_j$$

Podział. Przyjmijmy, że zadanie PL zostało rozwiązane dla wierzchołka v_j , przy czym $x(j)$ ma nie wszystkie składowe całkowitoliczbowe. Przykładowo niech pewna zmienna

$$x_{Bi} = [y_{i0}] + f_{i0}, \quad 0 < f_{i0} < 1.$$

Podział S_j , który jest przy tym rozbiem zbioru, jest następujący:

$$S_j^* = \{S_j \cap \{x \mid x_{Bi} \leq [y_{i0}]\}, S_j \cap \{x \mid x_{Bi} \geq \langle y_{i0} \rangle\}\},$$

Gdzie $\langle a \rangle$ jest najmniejszą liczbą całkowitą większą lub równą a , $[a]$ zaś oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą a .

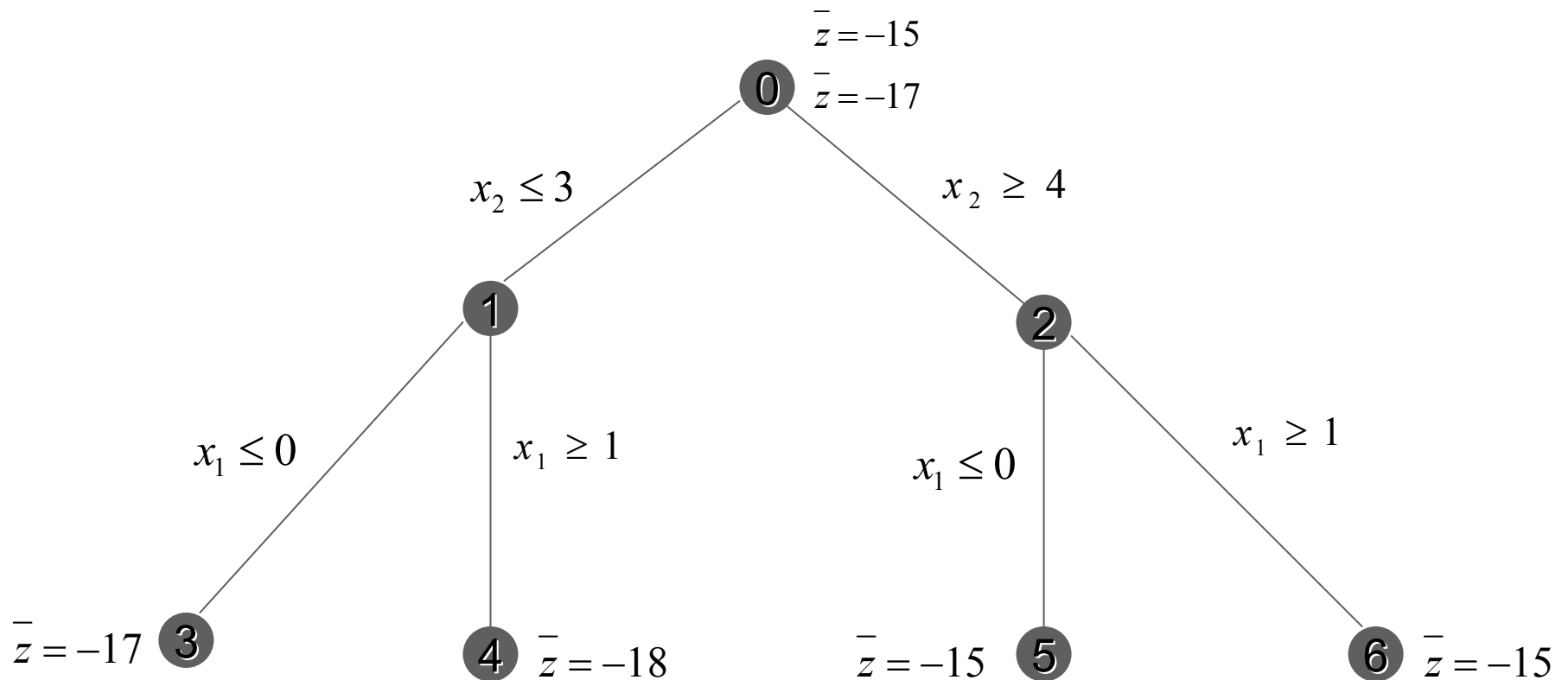
Skończoność. Załóżmy, że każda ze zmiennych x_j jest ograniczona i jej granica górna wynosi u_j . Niech

$$S_k = \{x \mid Ax = b, 0 \leq \alpha_j^k \leq x_j \leq \beta_j^k \leq u_j, \text{ całkowite } j = 1, \dots, n\},$$

$$H_k = \{x \mid 0 \leq \alpha_j^k \leq x_j \leq \beta_j^k \leq u_j, x_j \text{ całkowite } j = 1, \dots, n\}.$$

- **Zadanie PL jest pożądanym osłabieniem zadania PCL, gdyż dołączone ograniczenia dają górną i dolną granicę dla poszczególnych zmiennych.**
- **Zagadnienia PL przy założeniu ograniczoności zmiennych rozwiązuje się algorytmem dualnym simpleks.**

Przykładowe drzewo rozwiązań



- Żądanie binarności wektora x nie jest ograniczeniem zadania gdy jest znana skończona górna granica u_j dla składowej x_j

$$dla\ x_j \in C\ i\ 0 \leq x_j \leq u_j$$

$$x_j \in S_j = \{s_{1j}, \dots, s_{pj}\}$$

Jest równoważne układowi ograniczeń:

$$x_j = \sum_{k=1}^p s_{kj} \delta_{kj}$$

$$\sum_{k=1}^p \delta_{kj} = 1\ dla\ \ ka\ ż\ deg\ o\ j$$

$$\delta_{kj} = 0\ lub\ 1,\ k = 1, 2, \dots, p\ dla\ ka\ ż\ deg\ o\ j$$

Przegląd pośredni

metodologia podziału i oszacowań dla wektora binarnego

Etapy metody:

□ podział – wybór pewnej zmiennej x_j i przyjęcie

$$S_k^* = \{S_k \cap \{\mathbf{x}, x_j = 0\}, S_k \cap \{\mathbf{x}, x_j = 1\}\}$$

oraz

$$S_k^+ = \{j, j \in W_k \text{ i } x_j = 1\}$$

$$S_k^- = \{j, j \in W_k \text{ i } x_j = 0\}$$

$$F_k = \{j, j \notin W_k\}$$

□ Oszacowania – wierzchołkowi v_k przyporządkowany jest problem:

$$\max z_k = \sum_{j \in F_k} c_j x_j + \sum_{j \in S_k^+} c_j,$$

$$\sum_{j \in F_k} a_{ij} x_j \leq b_i - \sum_{j \in S_k^+} a_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j = 0 \text{ lub } 1, \quad j \in F_k.$$

Programowanie liniowe całkowitoliczbowe metodologia odcięć

$$\begin{aligned} \max x_0 &= c^T x, \\ x \in S &= \{x \mid Ax = b, x \geq 0 \text{ i } x \in C\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Założmy, że istnieją \bar{A} oraz \bar{b} takie, że:

$$T = \{x \mid Ax = b, \bar{A}x = \bar{b}, x \geq 0\}$$

$S \subseteq T$ oraz zadanie osłabione w stosunku do zadania (1):

$$\max x_0 = c^T x, \quad x \in T$$

**ma całkowitoliczbowe rozwiązanie optymalne x_{opt} .
Wówczas x^0 jest rozwiązaniem optymalnym zadania (1).**

$$(2) \quad \begin{aligned} \max \quad & x_0 = c^T x, \\ x \in Q = & \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Założmy, że mamy reprezentację problemu (2) w postaci

$$x_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j \in R} y_{ij} x_j, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

Podstawowe odcięcie

$$\sum_{j \in R} ([h] y_{ij} - [h y_{ij}]) x_j \geq [h] y_{i0} - [h y_{i0}]$$

Odcięcia w metodzie form całkowitych

$$\sum_{j \in R} (y_{ij} - [y_{ij}]) x_j \geq y_{i0} - [y_{i0}].$$

$$y_{ij} = [y_{ij}] + f_{ij}$$

$$\sum_{j \in R} f_{ij} x_j \geq f_{i0},$$

$$s = -f_{i0} + \sum_{j \in R} f_{ij} x_j, \quad s \geq 0.$$

s musi być liczbą całkowitą:

$$x_{Bi} = -(-f_{i0} + \sum_{j \in R} f_{ij} x_j) + ([y_{i0}] - \sum_{j \in R} [y_{ij}] x_j),$$

$$\text{a } [y_{i0}] - \sum_{j \in R} [y_{ij}] x_j \quad \textbf{jest całkowite.}$$

Przykład PCL

$$\max x_0 = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x \in C$$

Rozwiązanie zadania osłabionego PL dla zmiennych rzeczywistych

		$-x_3$	$-x_5$
x_0	$\frac{31}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$
x_4	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Heurystyczne reguły wyboru wiersza źródłowego

- ❑ Należy zbudować odcięcie usuwające największy możliwy obszar nie zawierający punktów całkowitoliczbowych.
- ❑ Odcięcie staje się „głębsze”, jeśli

$$f_{ij} \downarrow \quad a \quad f_{i0} \uparrow$$

- ❑ Pożądane jest aby f_{i0} było możliwie duże a f_{ij} było możliwie małe dla $j \in R$

Reguły wyboru wiersza w metodzie form całkowitych

$$(I) \quad f_{r0} = \max_i f_{i0}$$

$$(II) \quad \frac{f_{r0}}{\sum_{j \in R} f_{rj}} = \max_i \frac{f_{i0}}{\sum_{j \in R} f_{ij}}$$

$$(III) \quad \frac{f_{r0}}{f_{rk}} = \max_i \frac{f_{i0}}{f_{ik}}$$

Dla określonego $k \in R$

Badanie całkowitoliczbowości rozwiązania PCL

W obliczeniach komputerowych liczba rzeczywista r jest traktowana jako liczba całkowita, jeśli

$$\min \{1 - f_r, f_r\} < \varepsilon$$

Nierozpoznanie całkowitoliczbowości może powodować:

- **wykonanie niepotrzebnych iteracji,**
- **dołączenie niepoprawnych odcięć**
- **utratę rozwiązania optymalnego.**

I na odwrót – błędne stwierdzenie całkowitoliczbowości może spowodować niepoprawne zakończenie obliczeń.

Optymalne rozwiązanie zadania PCL

Rozwiązanie dopuszczalne x zadania PCL jest jego rozwiązaniem optymalnym, gdy są spełnione trzy warunki:

- (i) prymarna dopuszczalność, $y_{i0} \geq 0, i = 1, \dots, m;$**
- (ii) całkowitoliczbowość, y_{i0} całkowite, $i = 1, \dots, m;$**
- (iii) dualna dopuszczalność, $y_{0j} \geq 0$ dla wszystkich $j \in R$**

Przegląd algorytmów metodologii odcięć

1. **Metoda form całkowitych- nie spełniony warunek całkowitoliczbowości y_{i0} dla $i=1,...,m$**
2. **Całkowitoliczbowy algorytm dualny – nie spełniony warunek prymalnej dopuszczalności:**

$$y_{i0} \geq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, m$$

3. **Całkowitoliczbowy algorytm prymalny – nie spełniony warunek dualnej dopuszczalności:**

$$y_{0j} \geq 0 \text{ dla } \forall j \in \mathbf{R}$$

Algorytm odcięć dla zadania PCL

Krok 1

Znajdź rozwiązanie spełniające dwa spośród trzech wymienionych warunków. Idź do Kroku 2.

Krok 2 - Test na optymalność

Jeśli trzeci warunek jest spełniony – Koniec algorytmu. W przeciwnym wypadku idź do Kroku 3.

Krok 3 - Odcinanie i eliminacja

**Dodaj odcięcie z odpowiednio dobraną wartością h .
Dokonaj eliminacji – aby zachować dwa wybrane warunki.
Może zaistnieć konieczność wykonania większej liczby kroków eliminacji. Wróć do Kroku 2.**