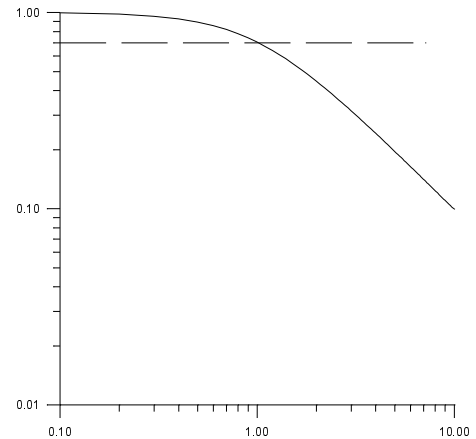
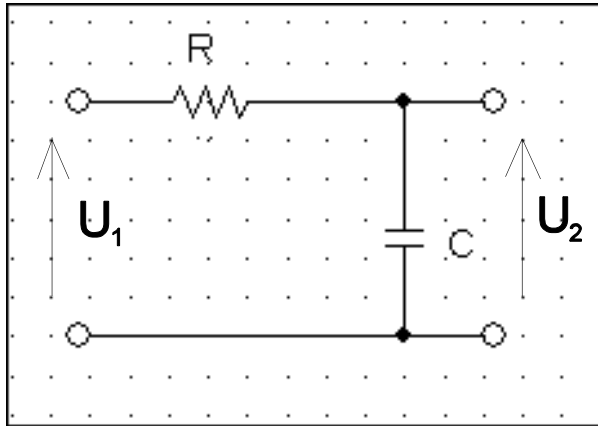
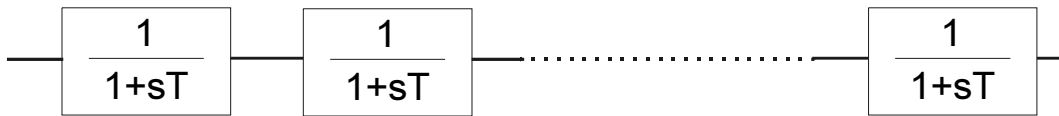


Filtry o tłumieniu krytycznym



Układ filtru o tłumieniu krytycznym i jego charakteryst. przenoszenia

$$K(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \quad T = RC \quad K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \quad K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$



$$K(s) = \frac{1}{1 + sT}; \quad K(s) = \frac{1}{(1 + sT)^n};$$

$$K(\omega) = \frac{1}{(1 + \omega^2 T^2)^{n/2}} \quad \varphi(\omega) = -n \arctg(\omega T)$$

$$K(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad \omega_g T = \sqrt[n]{\sqrt{2} - 1}$$

Wprowadźmy oznaczenia: $S = s / \omega_g$ $\Omega = \omega / \omega_g$ $a = \omega_g T$ $S = j\Omega$

$$K(S) = \frac{1}{(1 + aS)^n} \quad a = \sqrt[n]{\sqrt{2} - 1}$$

$$K(\Omega) = \frac{1}{[1 + \Omega^2 (\sqrt[n]{\sqrt{2} - 1})]^{n/2}}$$

Filtry Butterwortha

Filtr Butterwortha zajmuje się tylko przebiegiem charakterystyki amplitudowej. Założmy transmitancję filtru dolnoprzepustowego w postaci funkcji wymiernej :

$$S = s / \omega_g$$

$$K(S) = \frac{1 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_m S^m}{1 + b_1 S + b_2 S^2 + \dots + b_m S^m + \dots + b_n S^n}$$

$$m < n$$

Podstawiając $S=j\Omega$ otrzymamy charakterystykę amplitudową:

$$K^2(\Omega) = \frac{1 + c_1 \Omega^2 + c_2 \Omega^4 + \dots + c_m \Omega^{2m}}{1 + d_1 \Omega^2 + d_2 \Omega^4 + \dots + d_m \Omega^{2m} + \dots + d_n \Omega^{2n}}$$

Ściśle biorąc wzor powyższy opisuje charakterystykę amplitudową podniesioną do kwadratu . Dla uproszczenia będziemy ją nazywać $K^2(\Omega)$ - charakterystyką amplitudową (pamiętając o ścisłym założeniu). Następnie charakterystykę amplitudową rozwijamy w szereg Maclurina metodą dzielenia wielomianów i żądamy maksymalnej płaskości charakterystyki amplitudowej dla $\Omega=0$. Sprowadza się to do spełnienia warunku :

$$\frac{d^l [K^2(\Omega)]}{d(\Omega^2)^l} = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Analiza powyższych wzorów prowadzi do następujących związków:

$$\begin{array}{lll} d_1 = c_1; & d_2 = c_2 \dots \dots & d_m = c_m, \\ d_{m+1} = 0; & d_{m+2} = 0 \dots \dots & d_{n-1} = 0. \end{array}$$

Stąd maksymalnie płaska charakterystyka amplitudowa (dla $\Omega=0$) wyraża się wzorem:

$$K^2(\Omega) = \frac{1 + c_1 \Omega^2 + c_2 \Omega^4 + \dots + c_m \Omega^{2m}}{1 + c_1 \Omega^2 + c_2 \Omega^4 + \dots + c_m \Omega^{2m} + d_n \Omega^{2n}}$$

Stawiając warunek, aby wszystkie zera leżały w nieskończoności ($m < n$) otrzymujemy:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

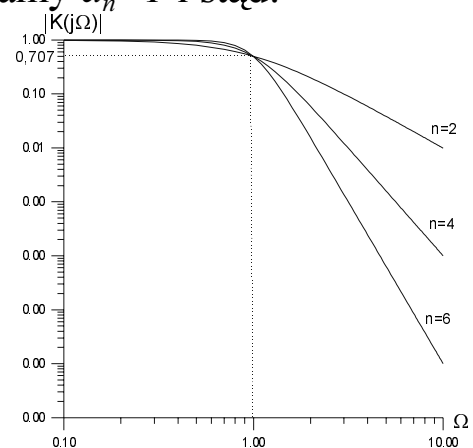
stąd:

$$K^2(\Omega) = \frac{1}{1 + d_n \Omega^{2n}}$$

Uwzględniając zależność $K^2(\Omega=1) = 0.5$ mamy $d_n = 1$ i stąd:

$$K^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}$$

Otrzymaliśmy zatem aproksymację Butterwortha.



Np. filtr drugiego rzędu:

$$K(S) = \frac{1 + a_1 S}{1 + b_1 S + b_2 S^2}$$

$$K(j\Omega) = \frac{1 + j\Omega a_1}{1 + j\Omega b_1 - \Omega^2 b_2}$$

$$K^2(\Omega) = K(j\Omega)K(-j\Omega) = \frac{1 + a_1^2 \Omega^2}{(1 - b_2 \Omega^2)^2 + b_1^2 \Omega^2} = \frac{1 + a_1^2 \Omega^2}{1 + \Omega^2 (b_1^2 - 2b_2) + b_2^2 \Omega^4}$$

Warunki:

$$a_1^2 = b_1^2 - 2b_2 \quad \text{a dla } \omega_g: \quad K^2(1) = \frac{1 + a_1^2}{1 + a_1^2 + b_2^2} = \frac{1}{2}$$

Przyjmijmy w liczniku wielomian równy 1 $\Rightarrow a_1 = 0$

Wtedy: $b_2 = 1$ oraz $b_1 = \sqrt{2}$

Dla charakterystyki n -rzędu:

$$K^2(\Omega) = \frac{K_0^2}{1 + d_1 \Omega^2 + d_2 \Omega^4 + \dots + d_n \Omega^{2n}}$$

Oznacza to zerowanie $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1} = 0$

Współczynnik d_n wynika z warunku dla częstotliwości granicznej:

$$K^2(1) = K_0^2 \frac{1}{1 + d_2} = K_0^2 \frac{1}{2}, \quad d_2 = 1$$

Tak więc filtr Butterwortha n -rzędu :

$$K(\Omega) = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

W celu syntezy wprowadźmy oznaczenia:

$$K(S) K(-S) = 1/M(S) \quad 1/M(-S) = 1/Q(S)$$

$$K(j\Omega) K(-j\Omega) = K^2(\Omega) = 1/M(j\Omega) \quad 1/M(-j\Omega)$$

$$M^2(\Omega) = 1 + \Omega^{2n} = Q(j\Omega) = Q(S)$$

Podstawiając $\Omega = S/j$ szukamy miejsc zerowych mianownika - $Q(S)$ odrzucając rozwiązania o częściach rzeczywistych dodatnich.

$$\mathbf{1) \quad n = 1} \quad M^2(\Omega) = 1 + \Omega^2; \quad Q(S) = 1 + S^2/j^2 = 1 - S^2 = 0; \quad S = \pm 1$$

$$K(S) = \frac{K_0}{1 + S} \quad \varphi(\Omega) = -\arctg \Omega$$

$$\mathbf{2) \quad n = 2} \quad M^2(\Omega) = 1 + \Omega^4; \quad Q(S) = 1 + S^4 = 0$$

$$S^2 = \pm j \quad S_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$K(S) = \frac{K_0}{(S - S_1)(S - S_2)} = \frac{K_0}{1 + \sqrt{2}S + S^2}$$

$$\varphi(\Omega) = -\arctg \frac{\sqrt{2}\Omega}{1 - \Omega^2}$$

$$\mathbf{3) \quad n = 3} \quad M^2(\Omega) = 1 + \Omega^6 \quad Q(S) = 1 - S^6 = 0 \quad S^3 = \pm 1$$

$$S_1 = -1 \quad S_{2,3} = -\frac{1}{2} \mp j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$K(S) = \frac{K_0}{(1 + S)(1 + S + S^2)} \quad \varphi(\Omega) = -\arctg \frac{\sqrt{2}\Omega}{1 - \Omega^2}$$

$$\mathbf{4) \quad n = 4}$$

$$M(S) = (1 + 1,848 S + S^2)(1 + 0,765 S + S^2)$$

Filtry Czebyszewa

Filtry Czebyszewa oparte są na wielomianach przybliżających zero w przedziale $[-1,1]$

$$T_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

dla a_i różnego od 0

Twierdzenie Czebyszewa

Wielomian $F(x,a)$ najlepiej przybliży funkcję $f(x)$, gdy różnica $f(x) - F(x,a)$ przyjmuje w $n+2$ punktach przedziału

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$$

swoje ekstremalne wartości $\pm \varepsilon$ z kolejno zmiennymi znakami. Niech:

$$F(x,a) = a_n y_n(x) + \dots + a_1 y_1(x) + a_0 y_0(x)$$

$$f(x_m) - F(x_m, a) = (-1)^m \varepsilon$$

$$f'(x_m) - F'(x_m, a) = 0.$$

Równań jest $2(n+2)$ i można z nich wyznaczyć:

$n+1$ współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$

$n+2$ punktów " x_m "

oraz: ε .

Wielomian: $(T_n(x) - \varepsilon)(T_n(x) + \varepsilon)$ będzie miał podwójne pierwiastki w $n-1$ punktach wewnątrz naszego przedziału i pojedyncze pierwiastki dla $x = \pm 1$ (na końcach przedziału). Stopień tego wielomianu jest $2n$.

Wielomian $(x^2 - 1)[T_n'(x)]^2$ będzie miał te same pierwiastki co wielomian powyżej. Między tymi wielomianami zachodzi zależność:

$$n^2 [T_n^2(x) - \varepsilon^2] = (x^2 - 1)[T_n'(x)]^2$$

Z rozwiązania tego równania różniczkowego otrzymujemy:

$$T_n(x) = \varepsilon \cos(n \arccos x + k\pi), \text{ np. } k=0$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Miejsca zerowe leżą w przedziale $(-1, 1)$ i wynoszą:

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

Ekstrema występują dla:

$$|\cos(n \arccos x)| = 1 \quad x_m = \cos \frac{m\pi}{n}, \quad m=0, 1, 2, \dots, n$$

Postać algebraiczna wielomianów Czebyszewa

Podstawiając $x = \cos \phi$:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \arccos x) = \cos n \phi = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(n \phi) + j \sin(n \phi) + \cos(n \phi) - j \sin(n \phi)] = \\ &= \frac{1}{2} [(\cos \phi + \sqrt{\cos^2 \phi - 1})^n + (\cos \phi - \sqrt{\cos^2 \phi - 1})^n] = \\ &= \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n] \end{aligned}$$

Wzór Moivre'a: $\cos nx + j \sin nx = (\cos x + j \sin x)^n$

Np.

$$\begin{aligned} T_1(x) &= x & T_2(x) &= 2x^2 - 1 & T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 & T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x & \text{itd.} \end{aligned}$$

Poza przedziałem $[-1, 1]$ wielomiany Czebyszewa rosną lub maleją monotonicznie. Wykonując odwrotne przekształcenia dla $|x| > 1$:

$$\begin{aligned} x &= \cosh \phi = \cos j \phi & \sinh \phi &= -j \sin j \phi \\ T_n(x) &= \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n] = \cosh(n \operatorname{arcch} x) \end{aligned}$$

Dla dużego x można podać przybliżenie:

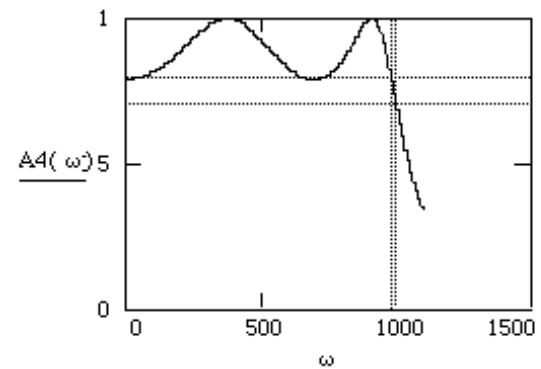
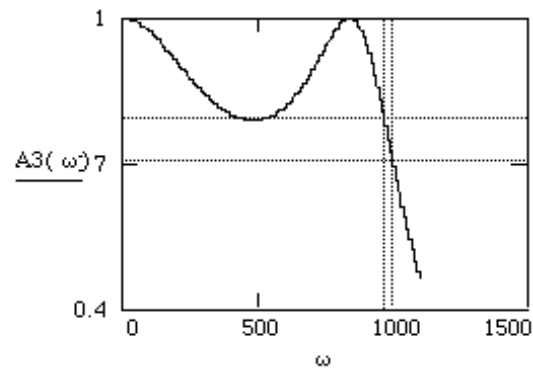
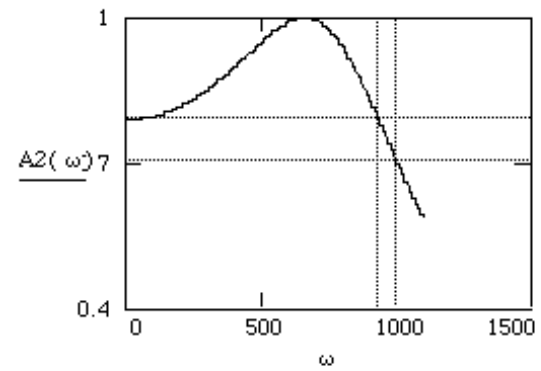
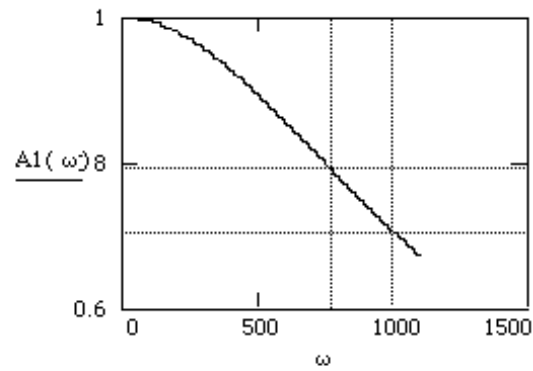
$$T_n(x) \approx 2^{n-1} x^n$$

Wzór rekurencyjny dla wielomianów Czebyszewa:

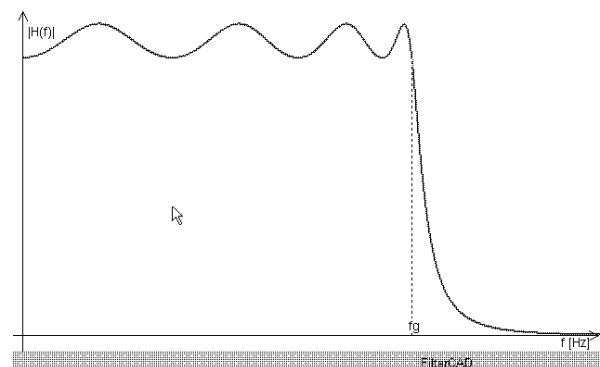
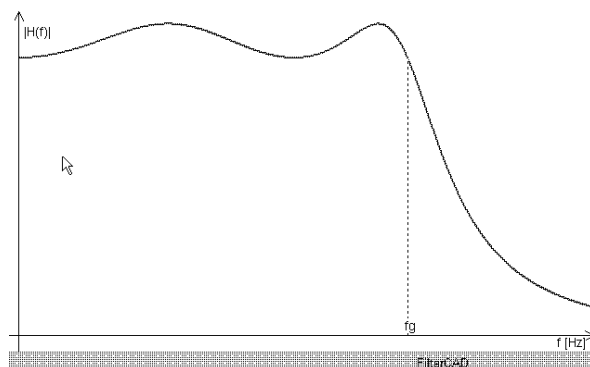
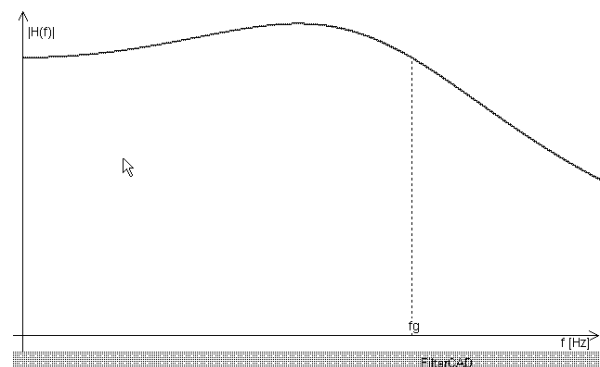
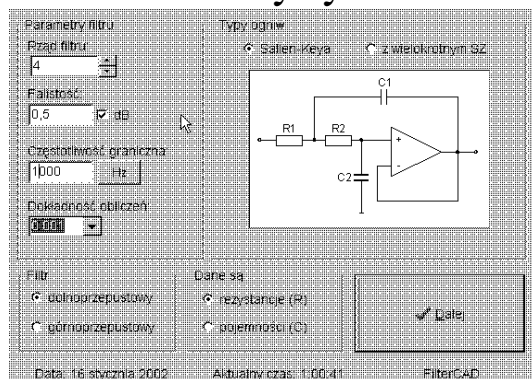
$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Charakterystyka amplitudowa filtra Czebyszewa

$$K^2(\Omega) = \frac{kK_0^2}{1 + \epsilon^2 T_n^2(x)}$$



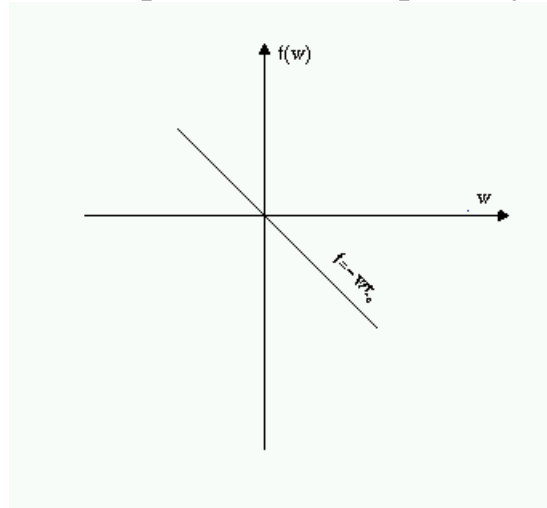
Charakterystyki filtrów Czebyszewa dla $n = 1, 2, 3, 4$



Symulacje filtrów Czebyszewa rzędu $n = 2, 4, 8$. Falistość 1dB

Filtry Bessela

Filtr Bessela zajmuje się tylko przebiegiem charakterystyki fazowej. Ze względu na własności dynamiczne idealną charakterystyką fazową jest charakterystyka liniowa przedstawiona poniżej :



Transmitancja takiego filtru wynosi:

$$K(j\omega) = K_0 e^{-j\omega t_0} \quad \text{lub} \\ K(s) = K_0 e^{-s t_0}$$

Oznaczając jako $x(t)$ sygnał wejściowy oraz $y(t)$ sygnał wyjściowy mamy

$$Y(s) = X(s)K(s) = K_0 X(s) e^{-s t_0}$$

Z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie zmiennej czasowej mamy:

$$y(t) = K_0 x(t - t_0)$$

Wynika stąd, że sygnał $x(t)$ po przejściu przez filtr nie ulega odkształceniu, a jedynie opóźnieniu o wartość t_0 .

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0$$

Obok charakterystyki fazowej stosuje się również charakterystykę opóźnienia grupowego T (opóźnienia czasowego), zdefiniowaną jako:

$$T(\omega) = -d\varphi(\omega) / d\omega$$

Wynika stąd, że idealna charakterystyka opóźnienia grupowego wyraża się wzorem :

$$t_0 = \text{const} = T(\omega)$$

Warunek liniowości charakterystyki fazowej sprowadza się do warunku maksymalnie płaskiej charakterystyki opóźnienia grupowego i może być zapisany wzorem:

$$\frac{d^k \varphi(\omega)}{d\omega^k} = 0 \quad \text{dla } k = 2, 3, 4, \dots$$

Np. dla charakterystyki fazowej: $f(\omega) = a_1 \omega + a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5$ otrzymuje się
 $a_3 = a_5 = 0$

Aproksymacja Bessela dla filtra II rzędu

$$k_u(S) = \frac{k_{u0}}{1 + a_1 S + b_1 S^2} = \frac{k_{u0}}{1 + j a_1 \Omega - b_1 \Omega^2}$$

przesunięcie fazowe filtra:

$$\varphi = \arctg \frac{a_1 \Omega}{1 - b_1 \Omega^2}$$

Znormalizowane opóźnienie grupowe:

$$T_{gr} = \frac{t_{gr}}{T_g} = t_{gr} \frac{\omega_g}{2\pi} \quad T_g = \frac{2\pi}{\omega_g}$$

$$T_{gr} = \frac{\omega_g}{2\pi} \frac{d\varphi}{d\omega} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_g}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\Omega} &= - \frac{1}{1 + \left[\frac{a_1 \Omega}{1 - b_1 \Omega^2} \right]^2} \frac{a_1 (1 - b_1 \Omega^2) + 2 b_1 a_1 \Omega^2}{(1 - b_1 \Omega^2)^2} = \\ &= \frac{-a_1 (1 + b_1 \Omega^2)}{1 - 2 b_1 \Omega^2 + b_1^2 \Omega^4 + a_1^2 \Omega^2} \end{aligned}$$

$$T_{gr} = \frac{1}{2\pi} \frac{a_1(1 + b_1\Omega^2)}{1 + (a_1^2 - 2b_1)\Omega^2 + b_1^2\Omega^4}$$

Dla $\Omega \ll 1$ można przedstawić aproksymację w sensie Butterwortha:

$$T_{gr} = \frac{1}{2\pi} \frac{a_1(1 + b_1\Omega^2)}{1 + (a_1^2 - 2b_1)\Omega^2}$$

T_{gr} jest niezależny od Ω , gdy współczynniki będą jednakowe:

$$b_1 = a_1^2 - 2b_1 \quad \text{czyli:} \quad b_1 = 1/3 a_1^2$$

Drugą zależność otrzymuje się z normalizacji wzmocnienia dla $\Omega = 1$:

$$\begin{aligned} |k_u|^2 &= 1/2 \\ \frac{1}{(1 - b_1)^2 + a_1^2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Łącznie z poprzednim równaniem daje to:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,3617 \\ b_1 &= 0,6180 \end{aligned}$$

Dla wyższych rzędów powstaje system równań nieliniowych.

Dla współczynników równania:

$$k_u = \frac{k_{u0}}{1 + c_1 P + c_2 P^2 + \dots + c_n P^n}$$

można jednak podać wzór rekurencyjny:

$$c_1 = 1$$

$$c_i = \frac{2(n-i+1)}{i(2n-i+1)} c_{i-1}$$

Mianowniki M tego równania będą wtedy wielomianami Bessela. Poniżej dodano je do rzędu czwartego:

$$1 + P$$

$$1 + P + \frac{1}{3} P^2$$

$$1 + P + \frac{2}{5} P^2 + \frac{1}{15} P^3$$

$$1 + P + \frac{3}{7} P^2 + \frac{2}{21} P^3 + \frac{1}{105} P^4$$

uwaga: tutaj P nie jest znormalizowane dla częstotliwości granicznej dla spadku o 3dB.

Wprowadzając parametr α , tak, że: $P = \alpha S$

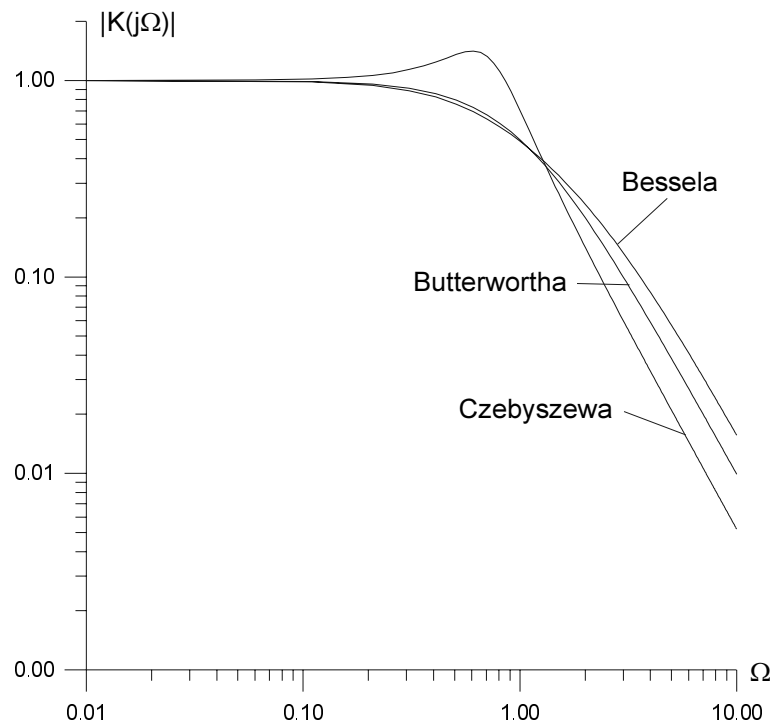
$$k_u = \frac{k_{u0}}{1 + c_1 \alpha S + c_2 \alpha^2 S^2 + \dots + c_n \alpha^n S^n}$$

α wyznacza się z warunku spadku charakterystyki o 3dB dla $\Omega = 1$.

Np. dla filtra drugiego rzędu:

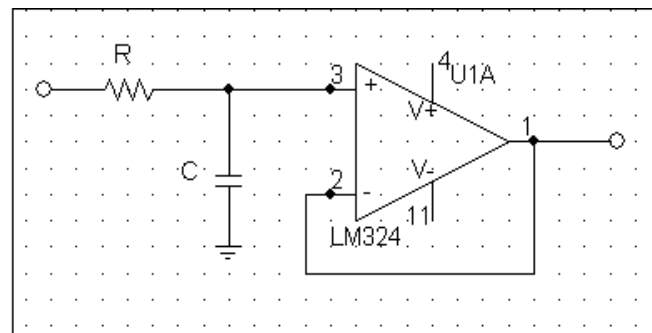
$$|M(P)| = |M(j\alpha\Omega)|_{\Omega=1} = |1 + j\alpha - 1/3 \alpha^2| = \sqrt{2}$$

otrzymuje się również $\alpha = 1,3617$



Porównanie trzech filtrów drugiego rzędu. Falistość f.Czebyszewa 3dB

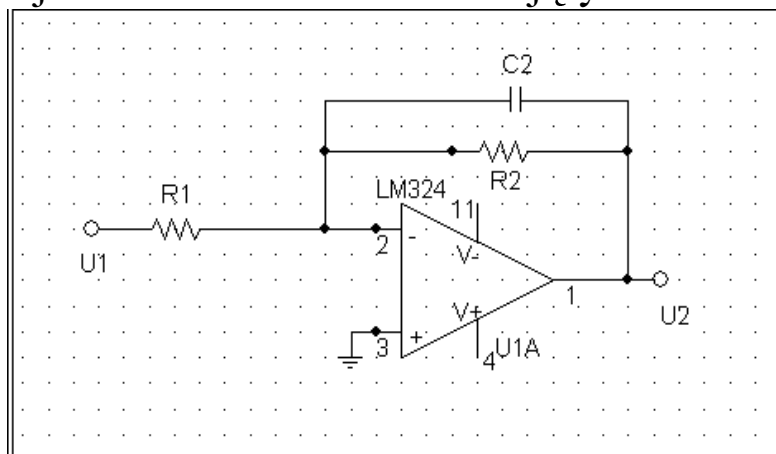
Realizacje rzędu pierwszego



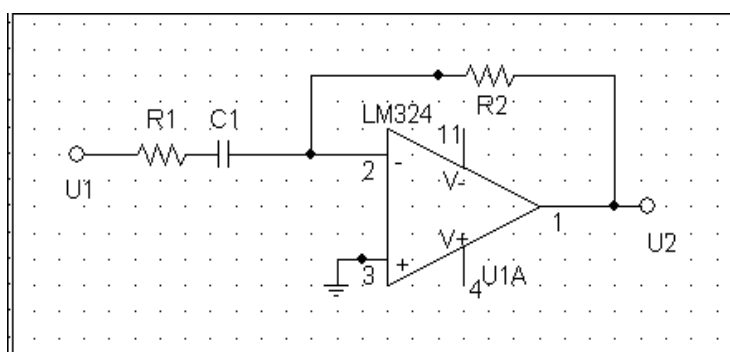
1.Realizacja z wtórnikiem napięciowym

$$k_u = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + S\omega_g RC}$$

Realizacje ze wzmacniaczem inwertującym:

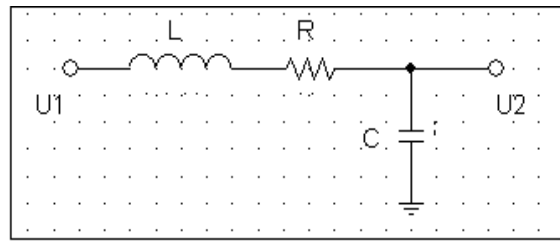


$$k_u = -\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{R_2}{1 + S\omega_g R_2 C_2}}{R_1}$$



$$k_u = -\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{S\omega_g R_1 C_1}}$$

Realizacje rzędu drugiego



Realizacja bierna RLC

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} = \frac{1}{1 + S\omega_g RC + S^2\omega_g^2 LC}$$

Z porównania z postacią ogólną:

$$R = \frac{a_1}{2\pi f_g C} \quad L = \frac{b_1}{4\pi^2 f_g^2 C}$$

Np. dla filtru Butterwortha rzędu drugiego:

$$a_1 = 1,414 \quad b_1 = 1,000$$

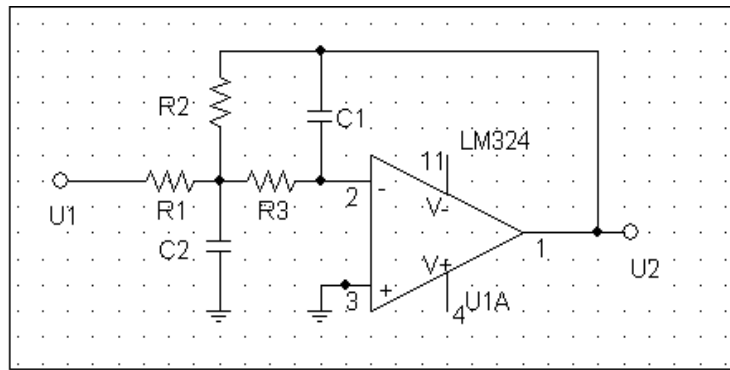
jeżeli

$$f_g = 10\text{Hz} \quad C = 10\mu\text{F}$$

to

$$R = 2,22\text{k}\Omega \quad L = 25,3\text{H (należy symulować)}$$

Filtr z wielokrotnym sprzężeniem zwrotnym



$$k_U = \frac{\frac{R_1}{R_2}}{1 + S\omega_g C_1 \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) + S^2 \omega_g^2 C_1 C_2 R_2 R_3}$$

$$k_U = \frac{R_2}{R_1} \quad a_1 = \omega_g C_1 \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) \quad b_1 = \omega_g^2 C_1 C_2 R_2 R_3$$

Eliminując R_1 oraz R_3 otrzymuje się:

$$a_1 = \omega_g C_1 \left[R_2 + \frac{b_1}{\omega_g^2 C_1 C_2 R_2} (1 + k_U) \right]$$

co prowadzi do równania kwadratowego z niewiadomą R_2 :

$$\omega_g^2 C_1 C_2 R_2^2 - a_1 \omega_g C_2 R_2 + b_1 (1 + k_U) = 0$$

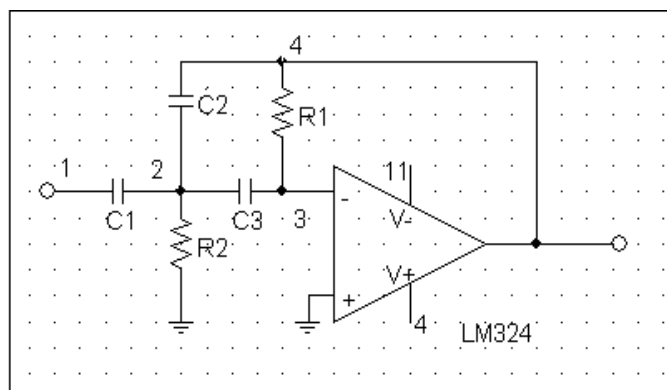
$$R_2 = \frac{a_1 C_2 - \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4 C_1 C_2 b_1 (1 + k_U)}}{4 \pi f_g C_1 C_2}$$

$$R_3 = \frac{b_1}{4 \pi^2 f_g^2 C_1 C_2 R_2} \quad R_1 = \frac{R_2}{k_U}$$

Musi być spełniony warunek: $\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4 b_1 (1 + k_U)}{a_1^2}$

Korzystnie jest przyjmować $C_2/C_1 = \dots$

Filtr górnoprzepustowy z wielokrotnym sprzężeniem zwrotnym



Transmitancja zostanie wyznaczona metodą Nathana

$$\begin{bmatrix} sC_1 & -sC_1 & 0 & 0 \\ -sC_1 & (sC_1 + sC_2 + sC_3 + \frac{1}{R_2}) & sC_3 & -sC_2 \\ 0 & -sC_3 & sC_3 + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & (-sC_2) & -\frac{1}{R_1} & (sC_2 + \frac{1}{R_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 = 0 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 = 0 \\ I_3 = 0 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} sC_1 & -sC_1 & 0 \\ -sC_1 & (sC_1 + sC_2 + sC_3 + \frac{1}{R_2}) & -sC_2 \\ 0 & -sC_3 & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

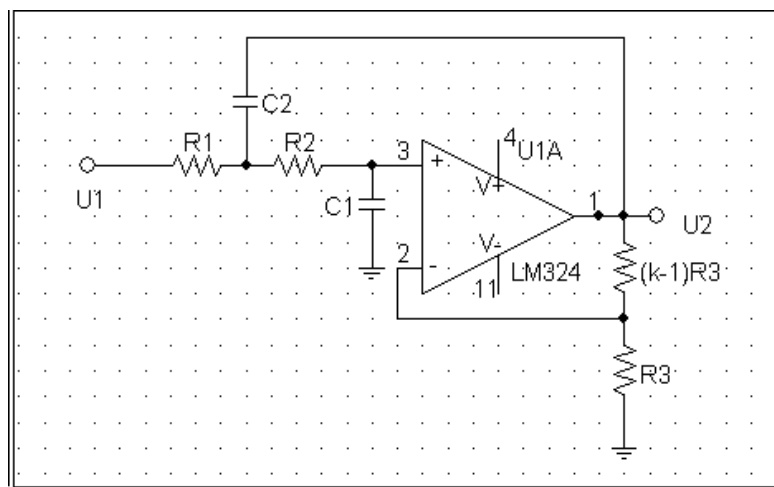
$$k_U = \frac{U_4}{U_1} = -\frac{s^2 C_1 C_3}{s^2 C_2 C_3 + s(C_1 + C_2 + C_3) \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 R_2}} =$$

$$s^2 \frac{C_1}{C_2}$$

Transm.górnoprz.

$$-\frac{s^2 + s \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{C_1}{C_2 C_3} \right) \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3}}{s^2 + s \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{C_1}{C_2 C_3} \right) \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3}}$$

Filtr z pojedynczym dodatnim sprzężeniem zwrotnym



$$k_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{k}{1 + S\omega_g[R_1C_1 + R_2C_1 + (1-k)R_1C_2] + S^2\omega_g^2R_1R_2C_1C_2}$$

Wygodnie jest użyć wtórnika $k=1$:

$$k_U = \frac{1}{1 + S\omega_gC_1(R_1 + R_2) + S^2\omega_g^2R_1R_2C_1C_2} = \frac{1}{1 + a_1S + b_1S^2}$$

Zakładając f_g , C_1 oraz C_2 otrzymuje się: $k_{U0} = 1$,

$$R_1, R_2 = \frac{a_1C_2 \pm \sqrt{a_1^2C_2^2 - 4b_1C_1C_2}}{4\pi f_gC_1C_2} \quad \text{warunek: } \frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4b_1}{a_1^2}$$

Inny sposób: można wybrać $R_1 = R_2 = R$ oraz $C_1 = C_2 = C$

$$k_U = \frac{1}{1 + S\omega_gRC(3-k) + S^2\omega_g^2R^2C^2}$$

porównując z postacią ogólną otrzymuje się:

$$RC = \frac{\sqrt{b_1}}{2\pi f_g}, \quad k = 3 - \frac{a_1}{\sqrt{b_1}}; \quad \omega_g = \frac{\sqrt{b_1}}{RC}$$

rodzaj filtru można zmieniać regulując k :

Rodzaj filtru	z tłumieniem krytycznym	Bessela	Butterwortha	Czebyszewa 3dB	$f=1/(2\pi RC)$ drgania nietłumione
k	1,000	1,267	1,586	2,482	3,000