

# Podstawy i algorytmy przetwarzania sygnałów – laboratorium

## Ćwiczenie nr 6

### Funkcja autokorelacji i korelacji wzajemnej

#### Cel ćwiczenia:

Badanie funkcji autokorelacji przykładowych stacjonarnych sygnałów modelowych i fragmentu sygnału mowy. Autokorelacja a autokowariancja. Autokorelacja a szerokość pasma sygnału. Autokorelacja sumy sygnałów ortogonalnych. Badanie funkcji autokorelacji i kumulanta trzeciego rzędu szumu kolorowego gaussowskiego i niegaussowskiego. Badanie funkcji korelacji wzajemnej sygnałów na przykładzie sygnału przed i po przejściu przez układ liniowy. Badanie wpływu parametrów estymacji na uzyskane estymaty.

#### Zagadnienia do powtórzenia przed ćwiczeniem:

- definicje i własności funkcji autokorelacji i korelacji wzajemnej sygnałów losowych,
- funkcja autokorelacji i korelacji wzajemnej sygnałów stacjonarnych,
- estymatory funkcji autokorelacji i korelacji wzajemnej,
- różnica między funkcją autokorelacji i autokowariancją,
- przejście sygnału losowego przez układ liniowy – wpływ na funkcje autokorelacji i korelacji wzajemnej.

#### 1. Autokorelacja wybranych sygnałów

Przeanalizować skrypty i funkcje **acor.m**, **autokorprzyk.m**. Korzystając z wymienionych skryptów i funkcji i odpowiednich ich modyfikacji wyznaczyć estymaty funkcji autokorelacji przykładowych sygnałów modelowych:

- szum biały gaussowski i o rozkładzie jednostajnym,
- sinusoida o losowej fazie początkowej,
- sygnał prostokątny dla różnych współczynników wypełniania (sygnał generuje skrypt **rect.m**).

Jaki jest wpływ długości sygnału na uzyskane estymaty?

Jak związane są ze sobą funkcje autokorelacji i autokowariancji? Kiedy są sobie równe? Dodając składową stałą do poprzednich sygnałów zilustrować te zależności.

#### 2. Autokorelacja sumy sygnałów

Funkcja autokorelacji sumy dwóch sygnałów stacjonarnych wynosi

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= E[z(t)z(t+\tau)] = E[(x(t)+y(t))(x(t+\tau)+y(t+\tau))] = \\ &= E[x(t)x(t+\tau)] + E[y(t)y(t+\tau)] + E[y(t)x(t+\tau)] + E[x(t)y(t+\tau)] = \\ &= R_{xx}(\tau) + R_{yy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

Gdy sygnały  $x(t)$  i  $y(t)$  są ortogonalne, tj. ich korelacja wzajemna równa jest zeru, wtedy autokorelacja ich sumy równa jest sumie autokorelacji. Gdy którykolwiek z sygnałów ma wartość oczekiwaną równą zeru,

wtedy ortogonalność zachodzi gdy sygnały te są nieskorelowane. Zbadać estymaty funkcji autokorelacji sumy dwóch sygnałów nieskorelowanych np. sinusoida + szum biały, sygnał prostokątny + szum biały. Napisać odpowiednie skrypty.

### 3. Statystyki wyższych rzędów

Funkcja autokorelacji jest statystyką drugiego rzędu. Statystyki drugiego rzędu w pełni opisują sygnały gaussowskie, jednak gdy mamy do czynienia z sygnałami niegaussowskimi, wskazane może być wyznaczenie ich statystyk wyższych rzędów. Moment trzeciego rzędu definiuje się następująco

$$m_{3,x}(t_1, t_2, t_3) = E[x(t_1)x(t_2)x(t_3)].$$

W przypadku procesu stacjonarnego mamy

$$m_{3,x}(\tau_1, \tau_2) = E[x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)].$$

Dla sygnałów o wartości oczekiwanej równej zeru, moment rzędu trzeciego równy jest *kumulantowi* rzędu trzeciego

$$c_{3,x}(\tau_1, \tau_2) = m_{3,x}(\tau_1, \tau_2), \quad E[x(t)] = 0.$$

Kumulanty mają ciekawe własności, jedną z nich jest zerowanie się wszystkich kumulantów rzędu większego od dwóch w przypadku sygnałów gaussowskich.

Przeanalizować funkcję **mom3.m** i skrypt **akorcum3.m**. Skrypt ten generuje dwa sygnały będące szumem kolorowym o tej samej szerokości pasma, z tym, że jeden ma rozkład gaussowski, a drugi niegaussowski. Następnie wyznaczana i rysowana jest funkcja autokorelacji i kumulant 3-go rzędu. Jaką postać ma estymator momentu trzeciego rzędu? Jakie analogie widać w porównaniu z estymatorem funkcji autokorelacji? Zaobserwować wpływ filtracji dolnoprzepustowej na funkcję autokorelacji. Porównać funkcje autokorelacji i kumulant 3-go rzędu dla sygnału gaussowskiego i niegaussowskiego. Zbadać wpływ długości sygnału na uzyskane estymaty.

### 4. Przejście sygnału przez układ liniowy, korelacja wzajemna

Przeanalizować funkcję **crosscor.m** i skrypt **korwzprzyk.m**. Skrypt generuje szum biały, dodaje do niego echo (przepuszcza przez układ liniowy o zadanej odpowiedzi impulsowej), następnie wyznacza estymator funkcji korelacji wzajemnej sygnałów przed i po przejściu przez układ liniowy oraz funkcji autokorelacji sygnału przed przejściem przez układ. Jaki związek zachodzi między wspomnianymi funkcjami korelacji wzajemnej i autokorelacji oraz odpowiedzią impulsową układu? Jak wygląda ten związek, gdy sygnałem wejściowym jest szum biały? Jak można wyznaczyć odpowiedź impulsową układu pobudzając go szumem białym? Zaobserwować wspomniane zależności posługując się skryptem **korwzprzyk.m**.

### 5. Autokorelacja sygnału mowy

Zbadać estymator funkcji autokorelacji w przybliżeniu stacjonarnych fragmentów sygnału mowy. Każdy student analizuje przydzielony mu sygnał. Plik w formacie wav wczytać można wykorzystując funkcję **auload**. Jak ma się okresowość sygnału do okresowości funkcji autokorelacji?

### 6. Zastosowanie funkcji korelacji wzajemnej do lokalizacji wzorca

Skrypt **lokalizacja.m** demonstrowa zastosowanie dwuwymiarowej funkcji korelacji wzajemnej do lokalizacji wzorca na czarno-białym obrazie (zapisanym w pliku **obraz.mat**). Przeanalizować skrypt i jego działanie ze wzorcem litery „a” (poziomym i obróconym o 90 stopni).

## 7. Analiza sygnału EKG

W katalogu `sl/2004_05_letni/sygnaly_ekg/` znajdują się rejestracje sygnałów EKG. Dla wybranego sygnału należy wyznaczyć częstość bicia serca – ilość uderzeń serca na minutę. Do realizacji tego zadania należy wybrać odpowiednią technikę analizy: korelacja wzajemna (funkcja `xcorr`) lub kowariancja wzajemna (funkcja `xcov`), a następnie napisać odpowiedni skrypt. Proszę uzasadnić dokonany wybór techniki analizy.

## Dodatek: m-pliki do ćwiczenia nr 6

### Skrypty:

`akorcum3` - wykresla estymatory parametrow sygnalu  
`autokorprzyk` - demonstruje dzialanie estymatora funkcji autokorelacji  
`korwzprzyk` - generuje sygnaly i wykresla estymator ich funkcji korelacji wzajemnej  
`lokalizacja` - demonstruje zastosowanie korelacji wzajemnej do lokalizacji wzorca

### Funkcje:

`acor` - oblicza funkcje autokorelacji sygnalu dla danej ilosci punktow opóźnienia  
`crosscor` - oblicza funkcje korelacji wzajemnej sygnalow lacznie stacjonarnych  
`mom3` - oblicza laczny moment 3-go rzędu  
`prdens` - wykresla znormalizowany histogram ze zbioru obserwacji  
`rect` - generuje sygnal prostokatny o wartosciach -1, 1

### Dane:

`obraz.mat` - przykładowy obraz czarnobiały  
[http://zts.ita.pwr.wroc.pl/sl/2004\\_05\\_letni/sygnaly\\_ekg/](http://zts.ita.pwr.wroc.pl/sl/2004_05_letni/sygnaly_ekg/) - sygnały EKG  
[http://zts.ita.pwr.wroc.pl/sl/2004\\_05\\_letni/sygnaly\\_wav/](http://zts.ita.pwr.wroc.pl/sl/2004_05_letni/sygnaly_wav/) - sygnały mowy