

# **SPRAWOZDANIE Z LABORATORIUM PODSTAWY I ALGORYTMY PRZETWARZANIA SYGNAŁÓW**

**Wykonał:**  
Kacper Nowak 132752

Termin:  
Czwartek, godzina 9.15

## **Ćwiczenie nr 2 Próbkowanie i kwantowanie**

## 1. Iloczyn skalarny.

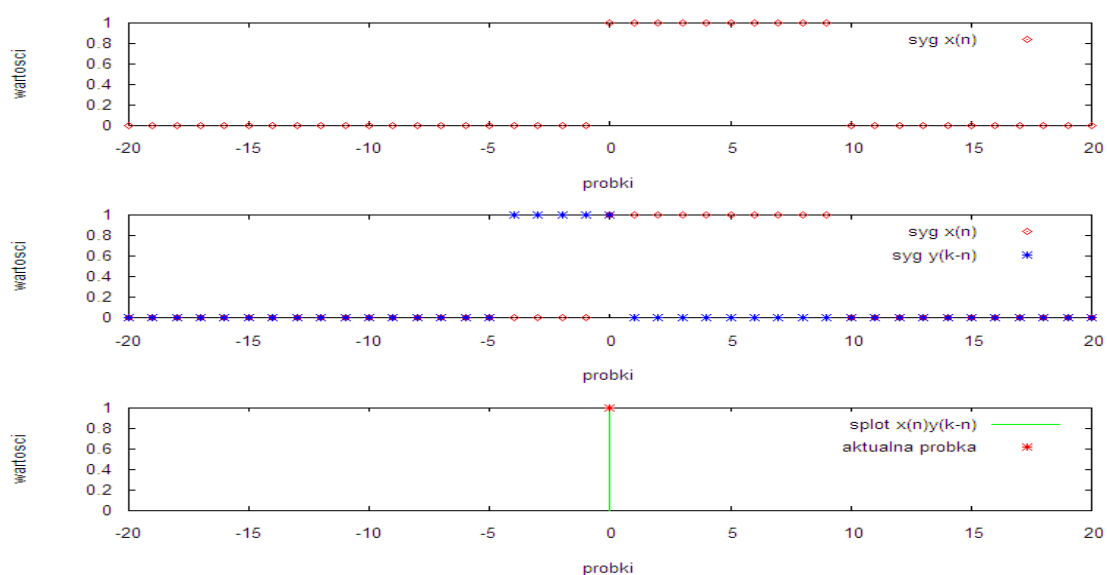
Czas obliczenia iloczynu skalarnego za pomocą pętli for, która zawiera jedynie jeden wiersz instrukcji, wynosi 0.414999 s. Ta sama operacja wykonana przy użyciu rachunku macierzowego programu octave, jest wykonywana w czasie 0.036001 s. Zysk jest zatem ponad jedenastokrotny.

Iloczyn skalarny jest skalar. Jego wartość to długość rzutu jednego wektora na drugi. Z punktu widzenia trygonometrii iloczyn skalarny to wspólne pole pomiędzy dwóch funkcji. Gdy iloczyn skalarny wynosi 0 oznacza to, że 2 wektory są do siebie ortogonalne, czyli prostopadłe. Termin pozwala zdefiniować wiele innych pojęć, takich jak np. przestrzeń ortogonalna.

Obliczono iloczyn skalarny dla funkcji  $f(t) = t^2$  oraz  $f(t) = -t$  na przedziale  $t \in [-5, 5]$ . Funkcje dobrano tak, aby wynik był oczywisty. Wartość 0 iloczynu skalarnego świadczy o tym, iż obie funkcje są ortogonalne. Doświadczenie realizuje skrypt „ilskal\_2.m”.

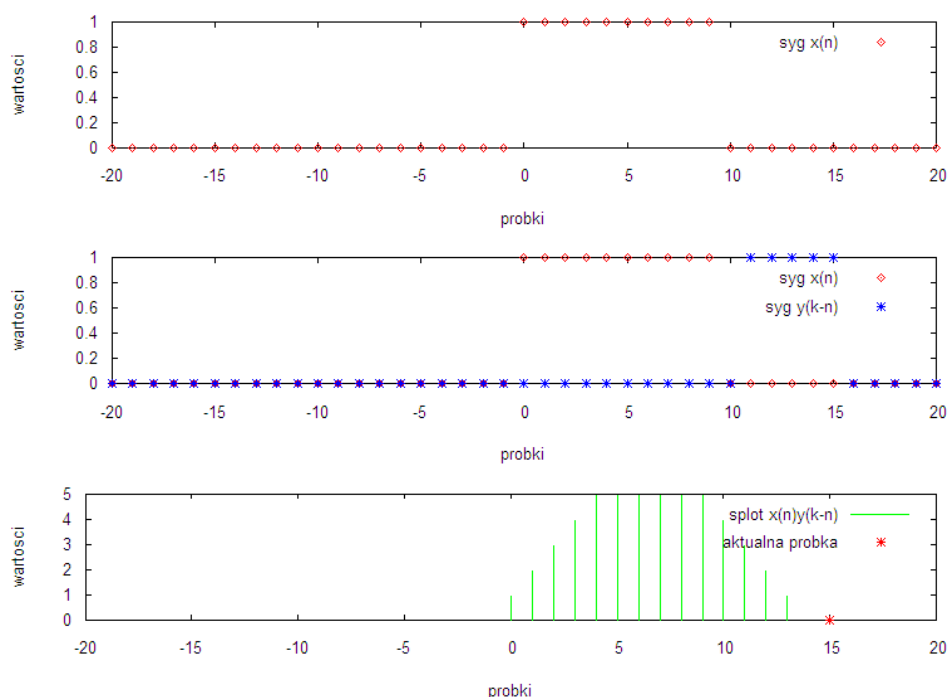
## 2. Splot.

a) Splot jest iloczynem skalarnym dwóch funkcji, z których jedna jest ma dziedzinę odwróconą w czasie i jest przesunięta o  $\tau$ . Jeśli argumenty funkcji są tak dobrane, że sygnały na siebie nie “zachodzą” to splot jest równy 0 i nie ma większego sensu liczenie go od – nieskończoności do + nieskończoności. Na rysunku 1 przedstawiono pierwszy niezerowy krok obliczania splotu dwóch sygnałów prostokątnych.



Rys. 1 – Splot sygnałów prostokątnych, krok 1.

Splot dowolnej próbki z próbką zerową daje w wyniku zero, dlatego dopiero nałożenie się na siebie dwóch próbek o wartości 1 daje wartość splotu równą 1. Na rysunku nr 2 przedstawiono kolejne kroki obliczania splotu danych funkcji.

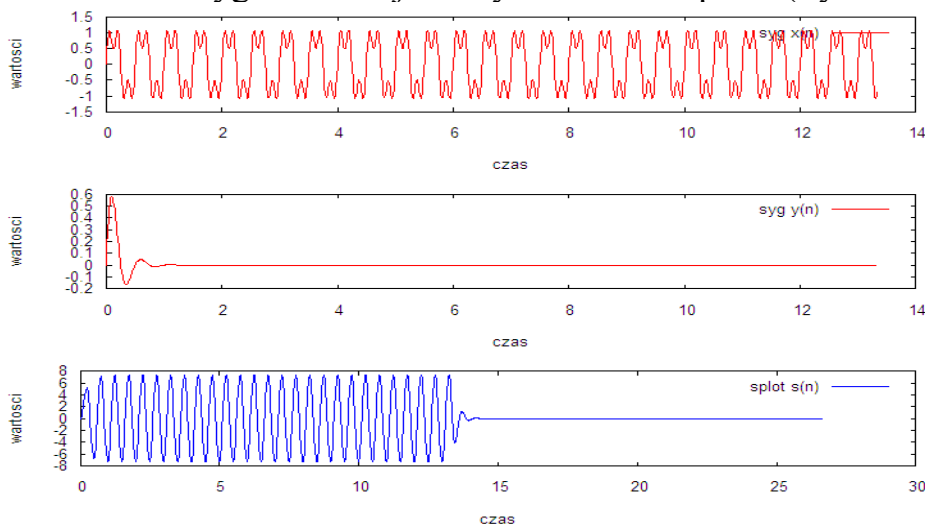


Rys. 2 – Splot sygnałów prostokątnych.

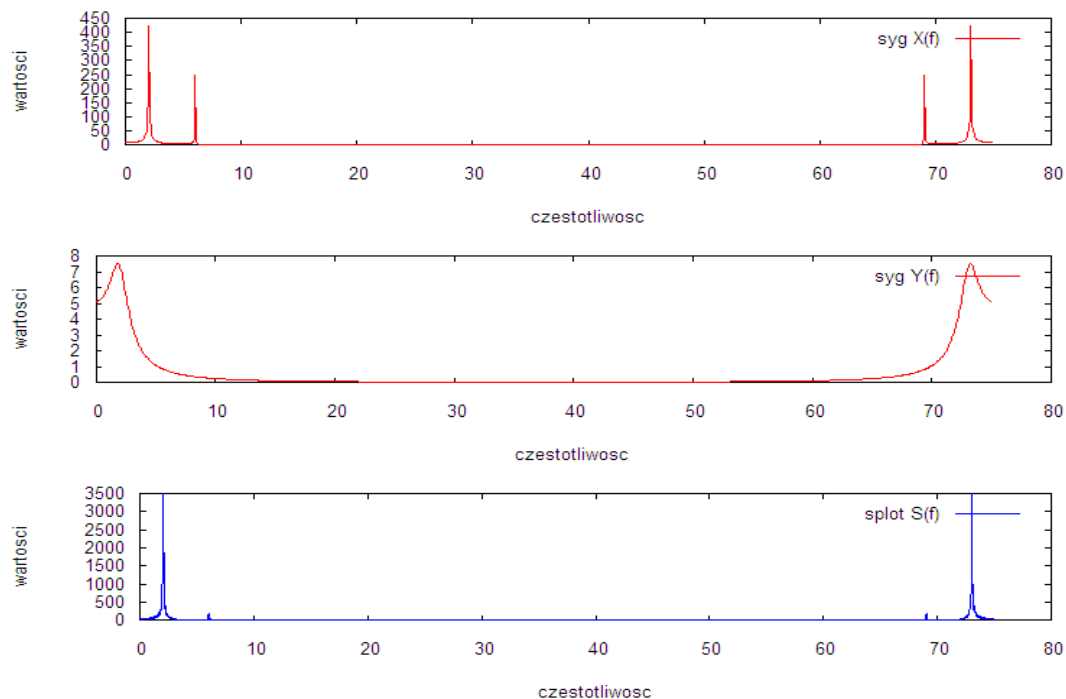
Wynikiem splatania dwóch ciągów długości  $n$  i  $m$  jest ciąg iloczynów skalarnych o długości  $n+m-1$ . Minus jeden ponieważ próbki muszą najść na siebie, żeby wartość iloczynu skalarnego nie była równa 0.

### b) Splot w dziedzinie czasu – widmo.

W tym doświadczeniu dokonano splotu sygnału składającego się dwóch sinusoid 2 i 6 Hz z sinusoidą 2 Hz tłumioną eksponentalnie ( rysunek 3). Następnie przeanalizowano widmo sygnałów wejściowych oraz ich splotu ( rysunek 4).



Rys. 3 – Dwie sinusoidy, sinusoida tłumiona, splot obu sygnałów.



Rys. 4 – Widmo sygnałów oraz ich splotu.

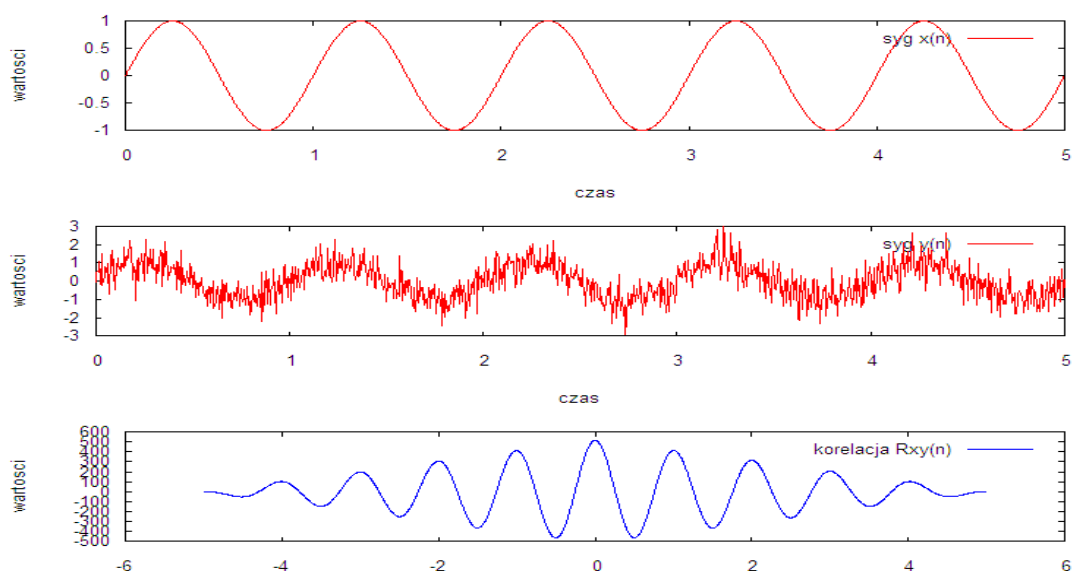
Po dokonaniu analizy graficznej zauważono, iż widmo splotu sygnałów jest iloczynem widm tych sygnałów. Z tego spostrzeżenia wypływa wniosek, iż splot w dziedzinie czasu odpowiada mnożeniu w dziedzinie częstotliwości. Rachunek operatorowy, transformata Laplace'a potwierdzają i uzasadniają zaobserwowane na wykresach zjawisko.

Dobierając odpowiednio drugi sygnał i wykorzystując funkcję splotu jest możliwe odsumienie sygnału pierwszego. Otrzymane widmo splotu jest prawie identyczne jak widmo sinusoidy. Zatem z wejściowego sygnału, będącego połączeniem sinusoid o różnych częstotliwościach, odzyskano sinusoidę o częstotliwości 2 Hz.

Funkcja splotu jest zatem podstawą działania filtrów cyfrowych.

### 3. Funkcja korelacji.

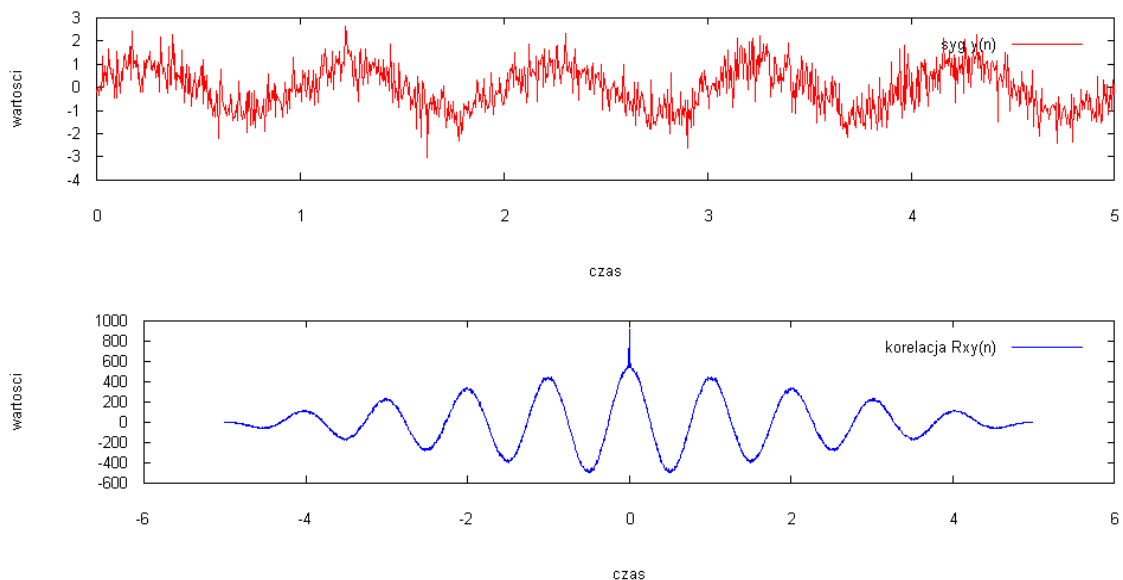
Funkcja korelacji jest miarą podobieństwa sygnałów. Im jej wartość jest większa tym sygnały są bardziej podobne do siebie. W ćwiczeniu zbadano korelację przesuwczą sinusoidy i sinusoidy zaszumionej ( rysunek 5 ).



Rys. 5 – Korelacja przesuwczą.

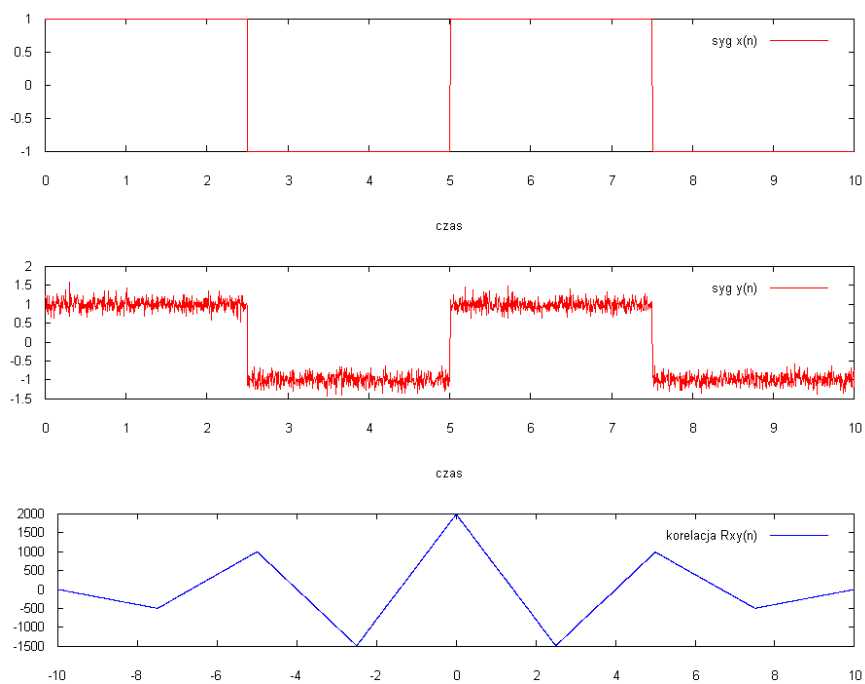
Na rysunku nr 5 zaobserwowano korelację przesuwczą ( ostatni wykres ) sygnałów ( pierwszy i drugi wykres). Analiza wyników prowadzi do następujących spostrzeżeń: badany sygnał był okresowy, a okres wynosił 1. Świadczy o tym okresowy wzrost korelacji sygnału, co jedną jednostkę czasu. Sygnały miały największą korelację wzajemną, gdy nie były przesunięte względem siebie. Dla przesunięcia  $\tau \geq 5$  lub  $\leq -5$  korelacja wynosi zero. Zatem można wnioskować, iż poza długość przynajmniej jednego z sygnałów jest równa 5 jednostek czasu.

Autokorelacja szumu białego to pik w zerze. Zatem autokorelacja zaszumionej sinusoidy da nam odsumioną sinusoidę z zniekształceniem w okolicy zera. Wynika z tego własność funkcji korelacji do odsumiania sygnałów. Dla potwierdzenia teoretycznego rozważania obliczono autokorelację zaszumionej sinusoidy ( rysunek nr 6 ). Realizacja obliczeń w skrypcie „corel\_sin\_szum.m”. Wynik był zgodny z przewidywaniami.



Rys. 6 – Autokorelacja zaszumionej sinusoidy.

Następne doświadczenia wykonano dla sygnału prostokątnego. Zamieszczono jedynie wykres prezentujący korelację sygnału zaszumionego z nie zaszumionym. Należy przy tym dodać, iż wynik dla autokorelacji zaszumionego sygnału prostokątnego oraz nie zaszumionego, był identycznym przebiegiem piłokształtnym, jaki zaobserwowano na rysunku 7.

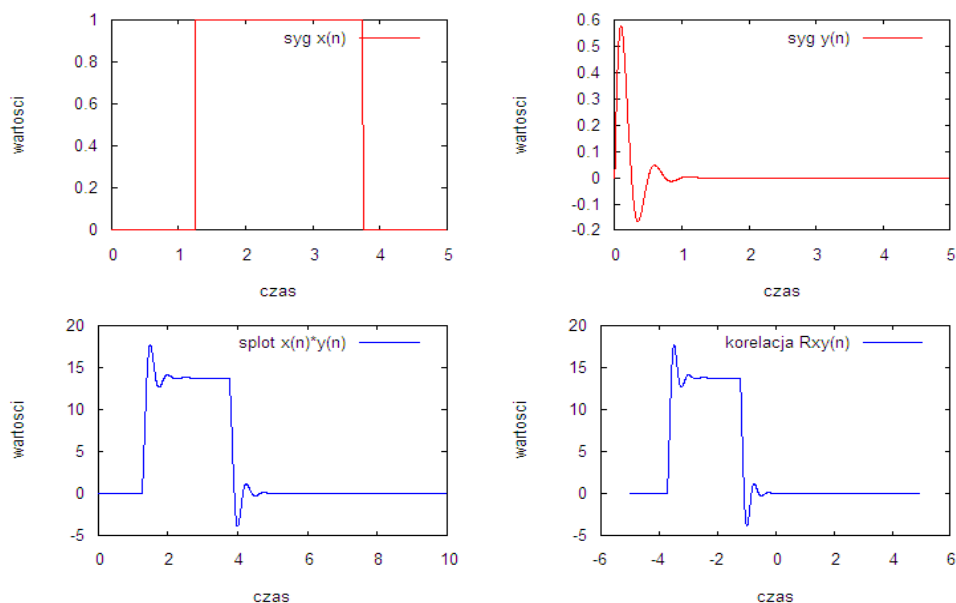


Rys. 7 – Korelacja nie zaszumionego s. prostokątnego z zaszumionym.

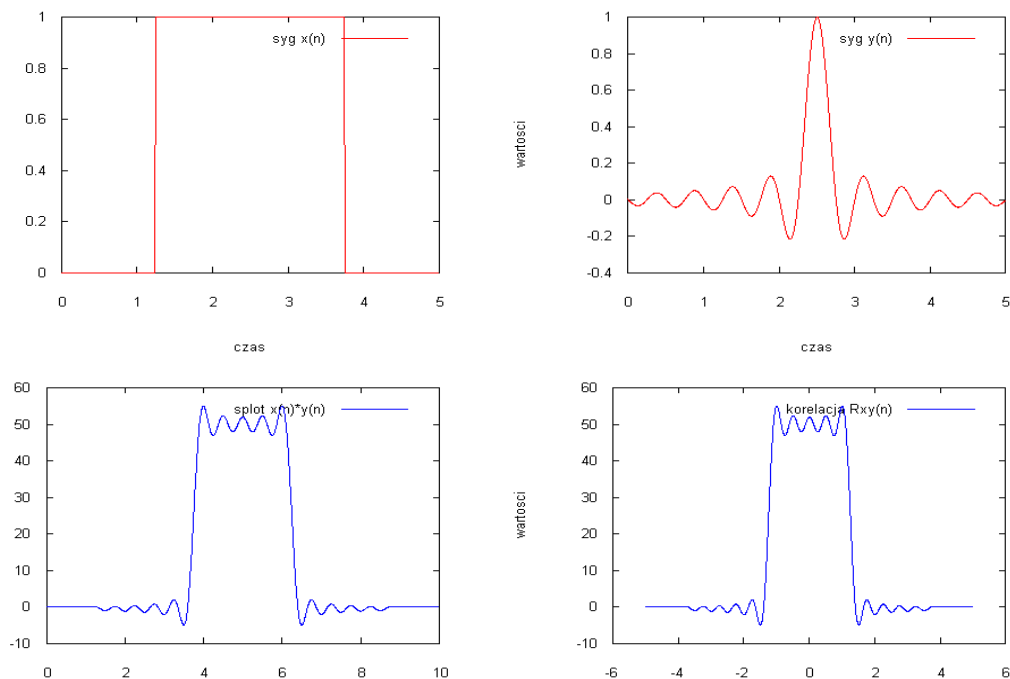
Korelacja to zatem iloczyn skalarny, w którym jeden z sygnałów jest przesunięty w dziedzinie czasu o  $\tau$ .

## 4. Relacja między funkcją korelacji a splotem.

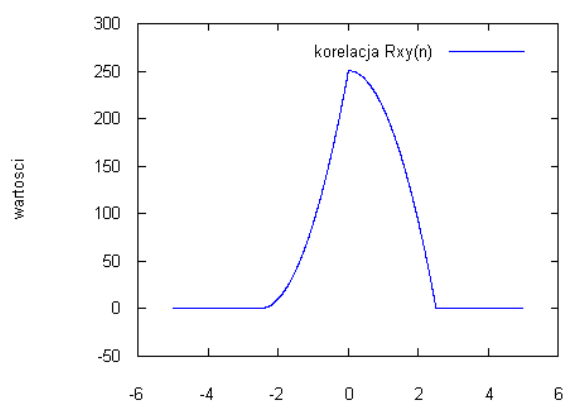
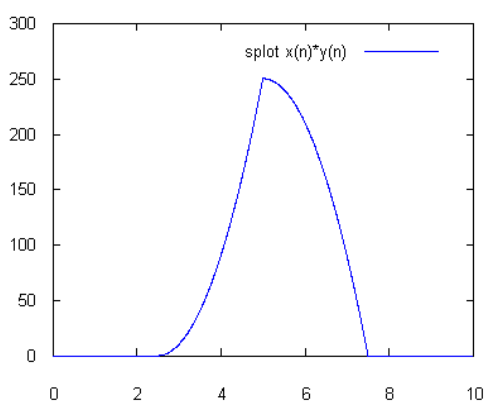
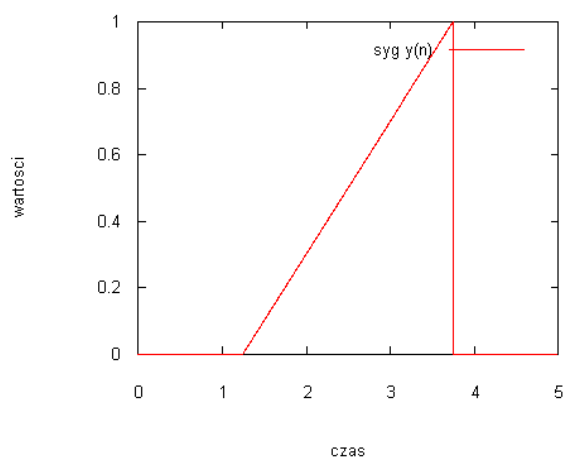
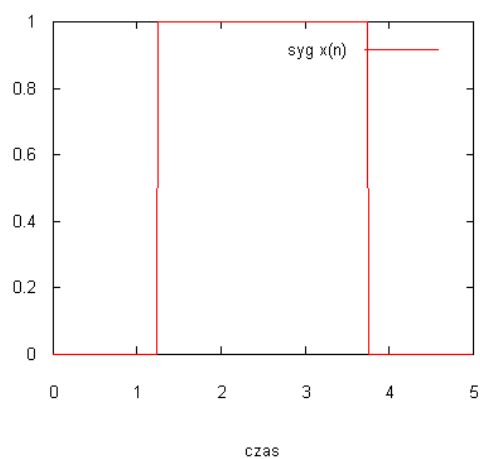
Do realizacji zadania wykorzystano skrypt „convcor.m”. Wykonano ... doświadczeń dla różnych kombinacji sygnałów.



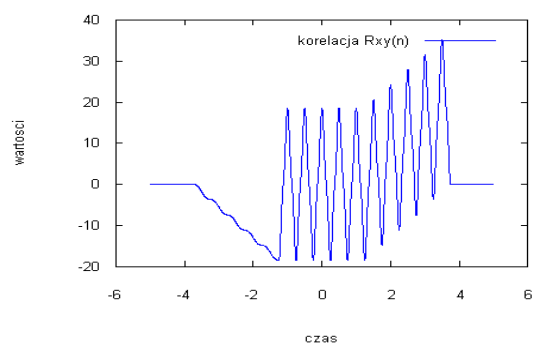
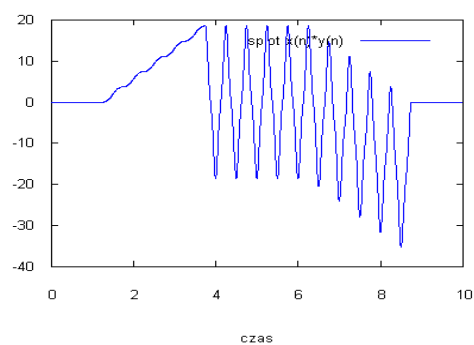
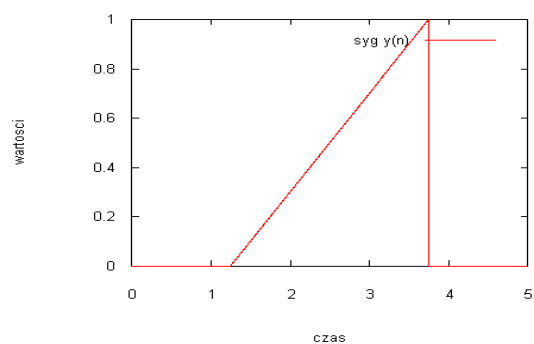
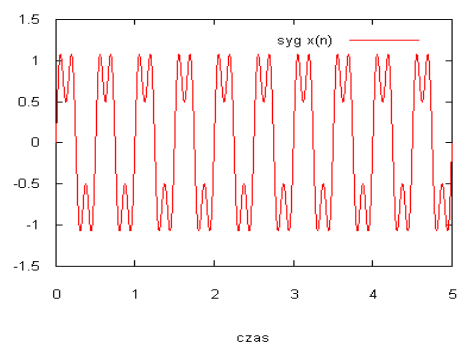
Rys. 8 – Korelacja i splot – s. prostokątny oraz tłumiona eksponentalnie sinusoida.



Rys. 9 – Korelacja i splot – s. prostokątny oraz  $\sin(x)/x$ .

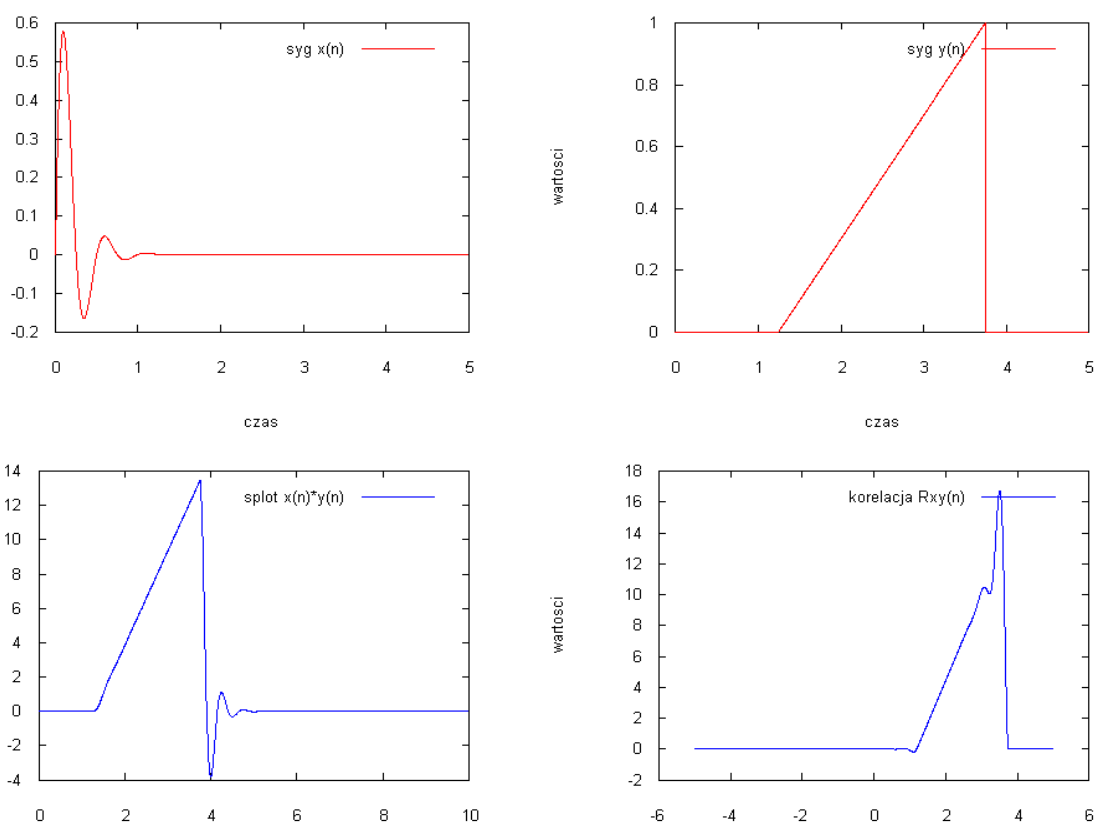


Rys. 10 – Korelacja i splot – s. prostokątny oraz liniowo narastający.



Rys. 11 – Korelacja i splot – sin 2 i 6 Hz oraz s. liniowo narastający.





Rys. 12 – Korelacja i splot – tłumiony sin oraz s. liniowo narastający.

Zauważono, że dla dwóch sygnałów niesymetrycznych względem osi czasu, funkcja korelacji i splotu daje różne wyniki.

Analiza wizualna wykresów prowadzi do następujących wniosków:

- Jeżeli drugi sygnał (  $y(n)$  ) jest symetryczny względem osi czasu to funkcja korelacji i splotu daje ten sam wynik, ale przesunięty w czasie oraz będący odbiciem lustrzanym.
- Jeśli oba są symetryczne to splot i korelacja wyglądają identycznie, lecz są przesunięte na osi czasu.

## 5. Wnioski.

- Obliczenia macierzowe w octave są znacznie szybsze ( zależnie od ilości obliczeń o kilka rzędów ) niż analogiczne obliczenia wykonywane przy użyciu pętli.
- W znaczeniu geometrycznym iloczyn skalarny dwóch wektorów jest miarą długości rzutu prostokątnego jednego wektora na drugi. Jest zawsze skalarem.
- Sygnały są ortogonalne, gdy ich iloczyn skalarny wynosi 0. Pojęcie ortogonalności ma wielkie znaczenie w przetwarzaniu sygnałów i jest wykorzystywane w definicjach przestrzeni różnego typu
- Splot jest wektorem iloczynów skalarnych dwóch funkcji, z których jedna jest odwrócona w czasie i przesuwana na osi czasu. Długość wektora splotu jest równa sumie liczby próbek obu sygnałów -1.
- Splot w funkcji czasu odpowiada iloczynowi widm sygnałów.
- Własność splotu w dziedzinie widma jest podstawą projektowania i działania filtrów.
- Miarą podobieństwa sygnałów jest funkcji korelacji. Im większa wartość tym sygnał są bardziej podobne do siebie.
- Autokorelacja szumu białego to pik w 0, zatem autokorelacja zaszumionego sygnału jest tymże sygnałem z pikiem w 0. Stąd wynika zdolność funkcji autokorelacji do odszumiania sygnałów.
- Korelacja jest iloczynem skalarnym dwóch funkcji, z których jedna jest przesunięta w dziedzinie czasu o pewną stałą wartość.
- Splot jest iloczynem skalarnym dwóch funkcji, z których jedna jest przesunięta w dziedzinie czasu o stałą wartość oraz ma odwróconą oś czasu.