

## **Sprawozdanie z laboratorium Podstaw i Algorytmów Przetwarzania Sygnałów**

<b>Ćwiczenie wykonał:</b> Karol Kozłowski (132652)	<b>Data :</b> 9 marzec 2006	<b>Prowadzący:</b> Jarosław Lachowski	<b>Ocena:</b>
---	--------------------------------	--	---------------

### **Ćwiczenie 8: Dyskretna Transformata Fouriera**

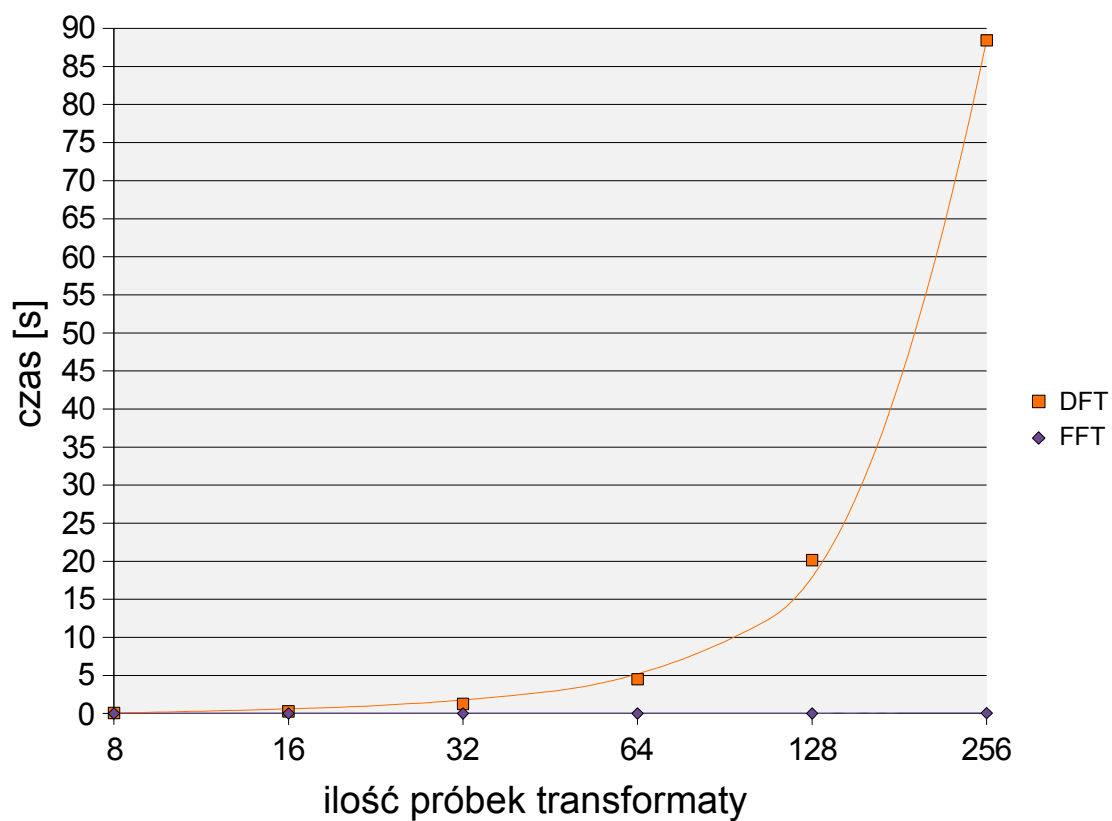
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawowymi właściwościami dyskretnego przekształcenia Fouriera. Badanie odwrotnego dyskretnego przekształcenia Fouriera. Porównanie wydajności obliczeniowej szybkiego przekształcenia Fouriera i dyskretnego przekształcenia Fouriera obliczanego z definicji. Badanie próbkowania widma ciągłego i analiza zjawiska przecieku widma. Badanie właściwości części rzeczywistej i urojonej widma, oraz realizacja operacji rozwijania fazy.

#### **Podstawy obliczania DFT**

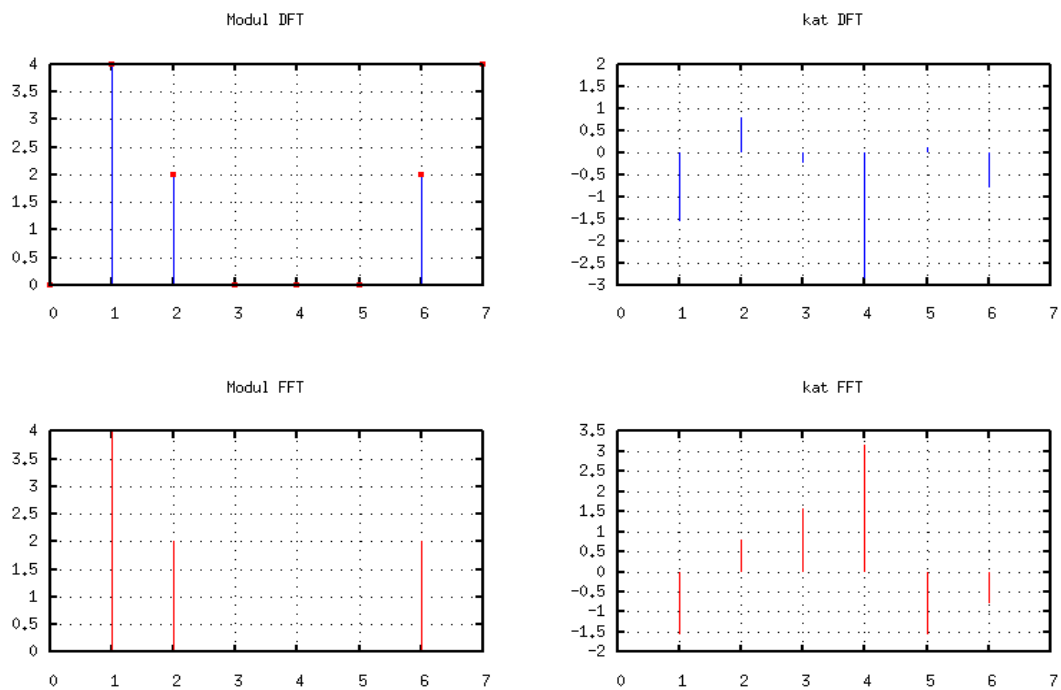
W poniższej tabeli (*tabela 1*) zawarte są wyniki pomiarów czasów wykonywania się transformat Fouriera dwoma metodami. Jak łatwo zauważyć metoda FFT jest o wiele szybsza i czas wykonywania praktycznie się nie zmienia nawet po zwiększeniu ilości próbek do  $N=256$ . Doskonale ilustruje to *wykres 1*.

<i>N</i>		<i>8</i>	<i>16</i>	<i>32</i>	<i>64</i>	<i>128</i>	<i>256</i>
<b>seria 1</b>	DFT	0,0729	0,2903	1,1972	4,6318	18,2972	89,5552
	FFT	0,0016	0,0018	0,0016	0,0016	0,0016	0,2612
<b>seria 2</b>	DFT	0,0648	0,2614	1,0581	4,5233	18,7860	87,2268
	FFT	0,0014	0,0012	0,0011	0,0020	0,0016	0,0015
<b>seria 3</b>	DFT	0,0713	0,3267	1,6438	4,4731	19,6626	93,1728
	FFT	0,0016	0,0014	0,0172	0,0013	0,0013	0,0014
<b>seria 4</b>	DFT	0,0642	0,2757	1,3557	4,4012	22,9945	87,9680
	FFT	0,0012	0,0016	0,0012	0,0014	0,0012	0,0014
<b>seria 5</b>	DFT	0,0719	0,2848	1,0523	4,4763	21,0636	84,1621
	FFT	0,0014	0,0012	0,0013	0,0013	0,0012	0,0015
<b>średnia</b>	DFT	0,0690	0,2878	1,2614	4,5011	20,1608	88,4170
	FFT	0,0014	0,0014	0,0045	0,0015	0,0014	0,0534

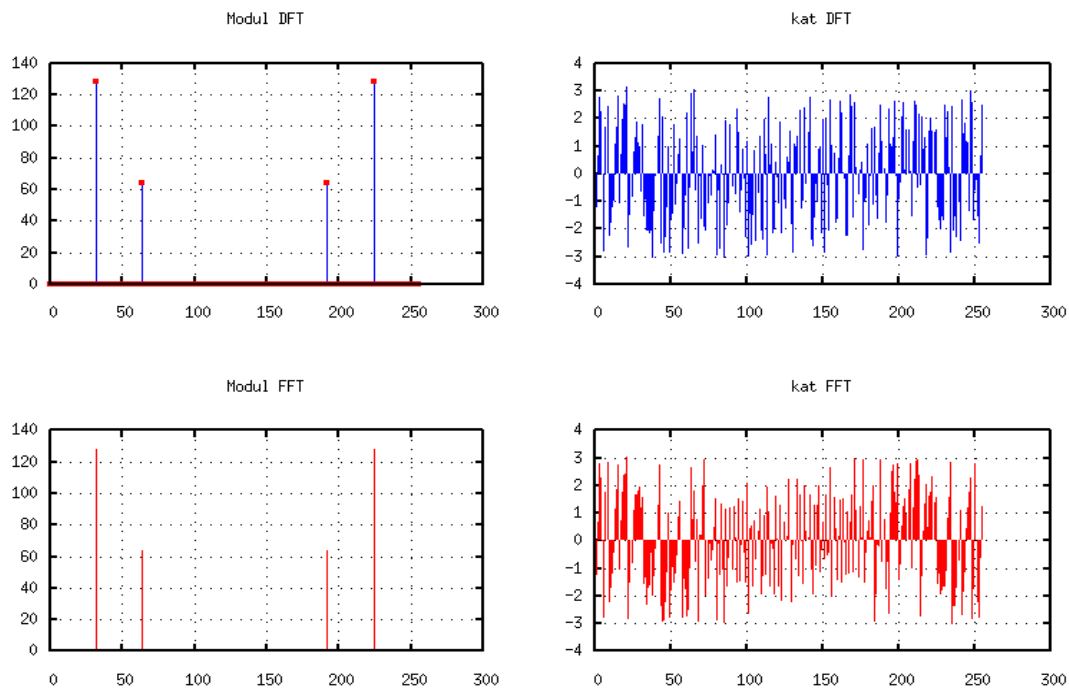
*Tabela 1: Porównanie czasów wykonywania DFT i FFT*



Wykres 1: Porównanie czasów wykonywania FFT i DFT



Wykres 2: Wykresy modułu i fazy obliczone za pomocą DFI i FFT dla  $N=8$



Wykres 3: Wykresy modułu i fazy obliczone za pomocą DFI i FFT dla  $N=256$

Na wykresach 2 i 3 możemy zaobserwować jak przedstawiają się wyniki obliczeń modułu i fazy zarówno dla DFT jak i dla FFT. Z ich analizy wynika, że dla obydwu metod moduł obliczony jest identycznie. Różnice występują jednak w przebiegach fazowych gdzie widać zdecydowaną różnicę pomiędzy FFT i DFT.

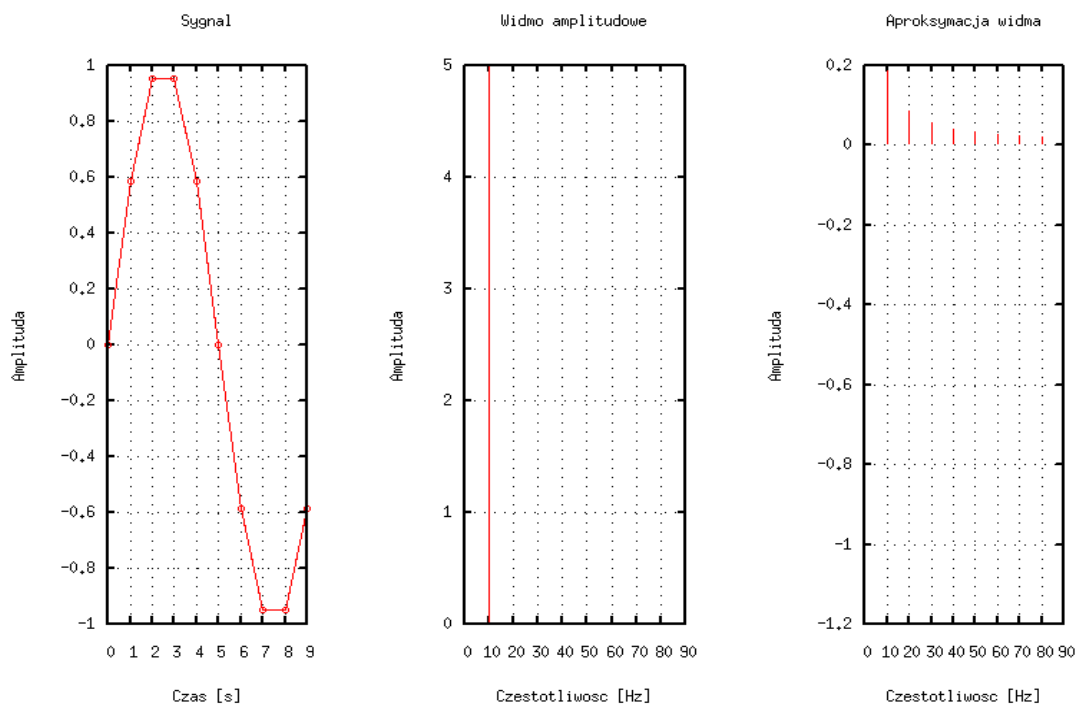
Kod skryptu m2freq.m:

```
function [f] = m2freq(m, fp)
%M2FREQ dokonuje konwersji numerów na częstotliwości analizy
% [f] = m2freq(m, fp)
%
% Wejście:
% m - wektor wierszowy z numerami prążków,
% fp - częstotliwość próbkowania.
%
% Wyjście:
% f - wektor wierszowy z częstotliwościami analizy
% odpowiadającymi poszczególnym numerom prążków.

f=m*fp/length(m);
end
```

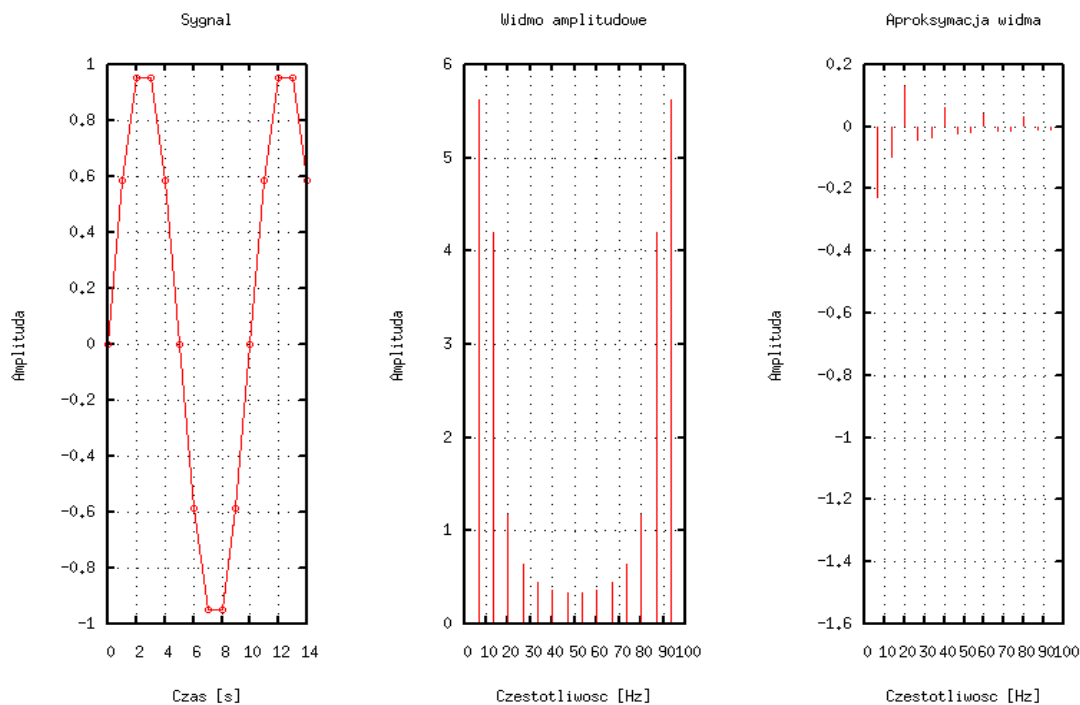
## Próbkowanie widma ciągłego

a) O całkowitej liczbie okresów



Wykres 4: Widmo amplitudowe DFT i aproksymacji dla  $f_s=10, f_p=100, N=10$ .

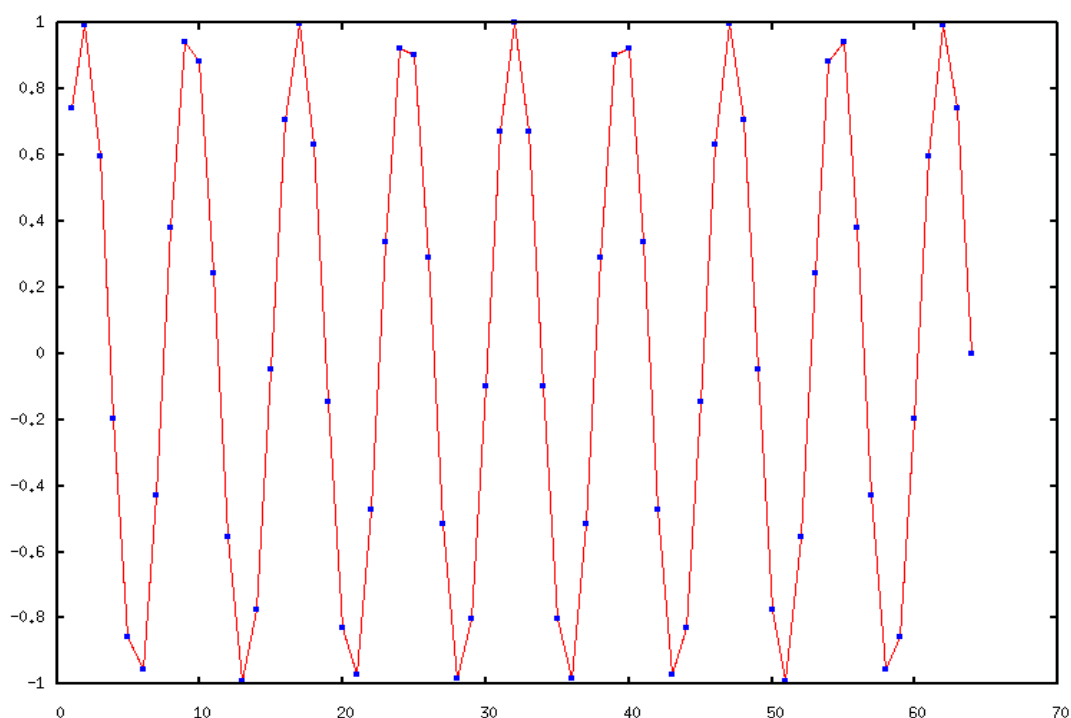
b) O niecałkowitej liczbie okresów



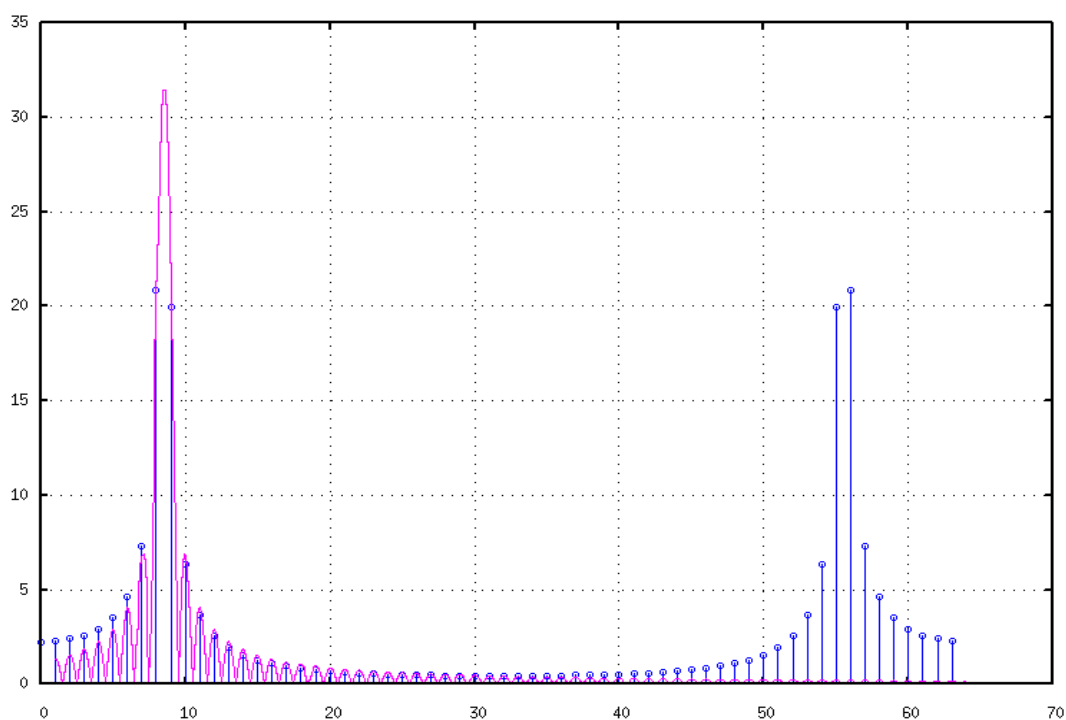
Wykres 5: Widmo amplitudowe DFT i aproksymacji dla  $f_s=10, f_p=100, N=15$ .

Na powyższych wykresach przedstawiono widma amplitudowe oraz jego aproksymację dla całkowitej i niecałkowitej liczby okresów. Jak widać, widmo sygnału o niecałkowitej liczbie okresów ulega rozmyciu. Aproksymacja sygnału dalece odbiega od rzeczywistości.

## Przeciek widma



Wykres 6: Wizualizacja sygnału  $f_s=8,5$ ,  $f_p=64$ ,  $N=64$ .



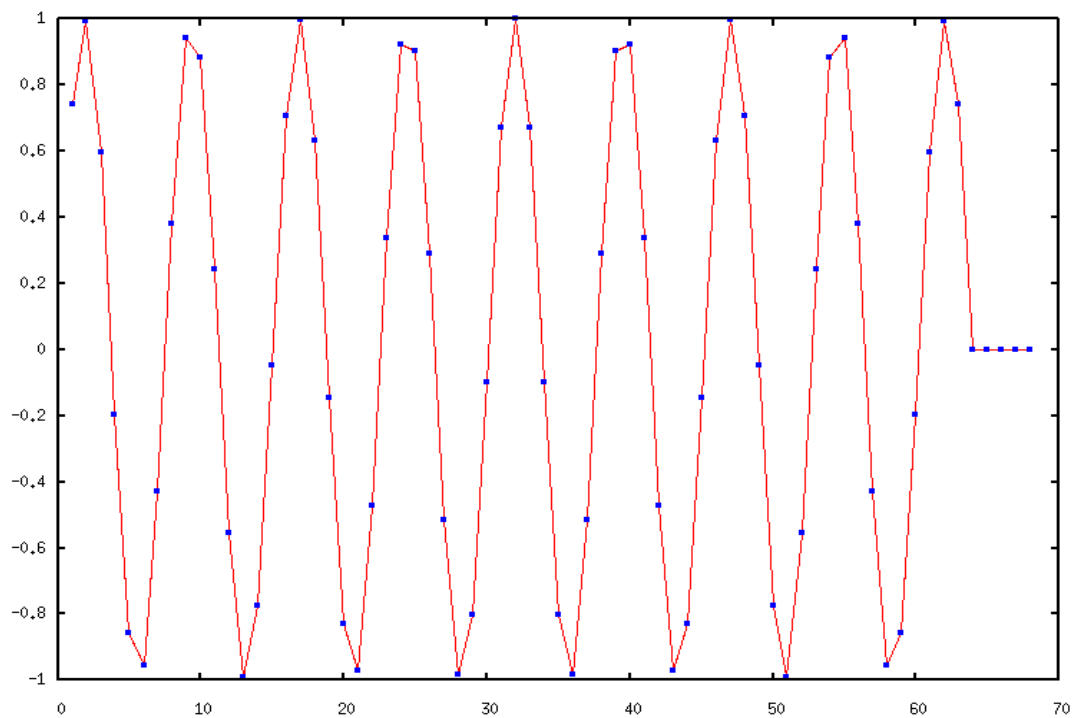
Wykres 7: Efekt przecieku widma.

Na powyższym wykresie możemy zaobserwować przeciek widma. jest ono efektem ustawienia częstotliwości próbkowania takiej, że niemożna było przy jej pomocy wyrazić niektórych próbek. Ich energia uległa rozmyciu. Zjawisku temu można zapobiegać zwiększając rozdzielczość próbkowania, lecz jest to proces wymagający dużych zasobów oraz zwiększający

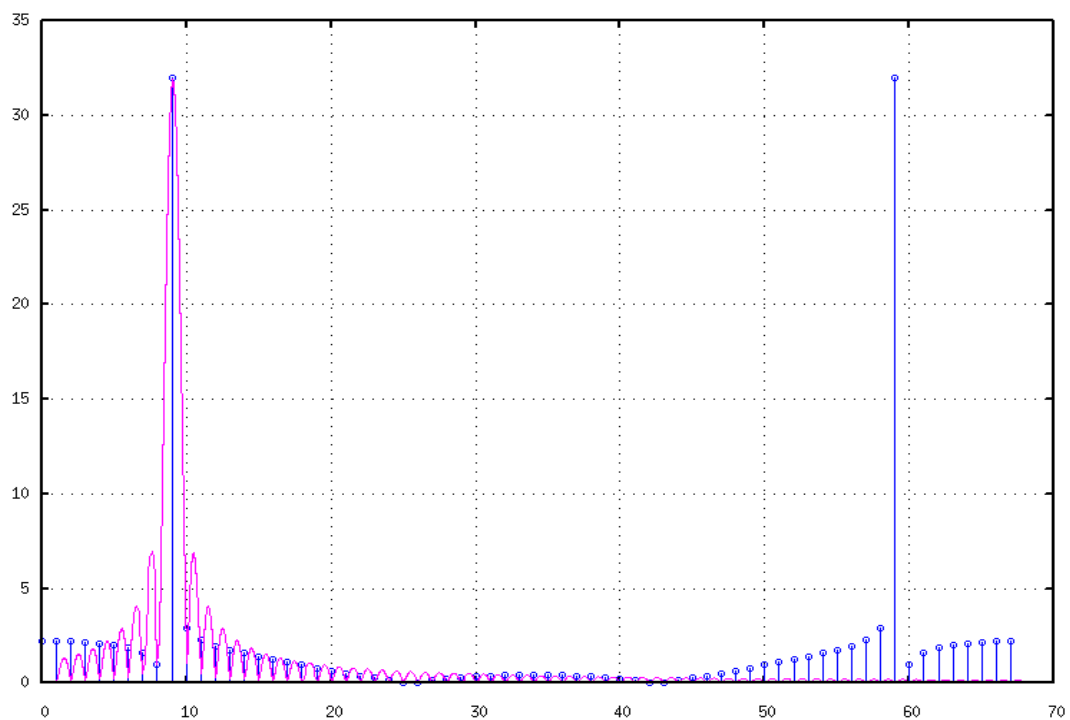
komplikacje obliczeń. Prostsza metoda jest podział sygnału na takie fragmenty aby zawierały pełne wielokrotności okresu. Stosując wtedy niższą częstotliwość próbkowania możemy zapobiec przeciekowi widma.

### Zwiększanie rozdzielczości DFT

Zwiększenie rozdzielczości DFT poprzez dołożenie na końcu badanego sygnału zer, co powoduje zwiększenie długości transformaty i zmniejszenie wartości częstotliwości analizy  $f_a$ .



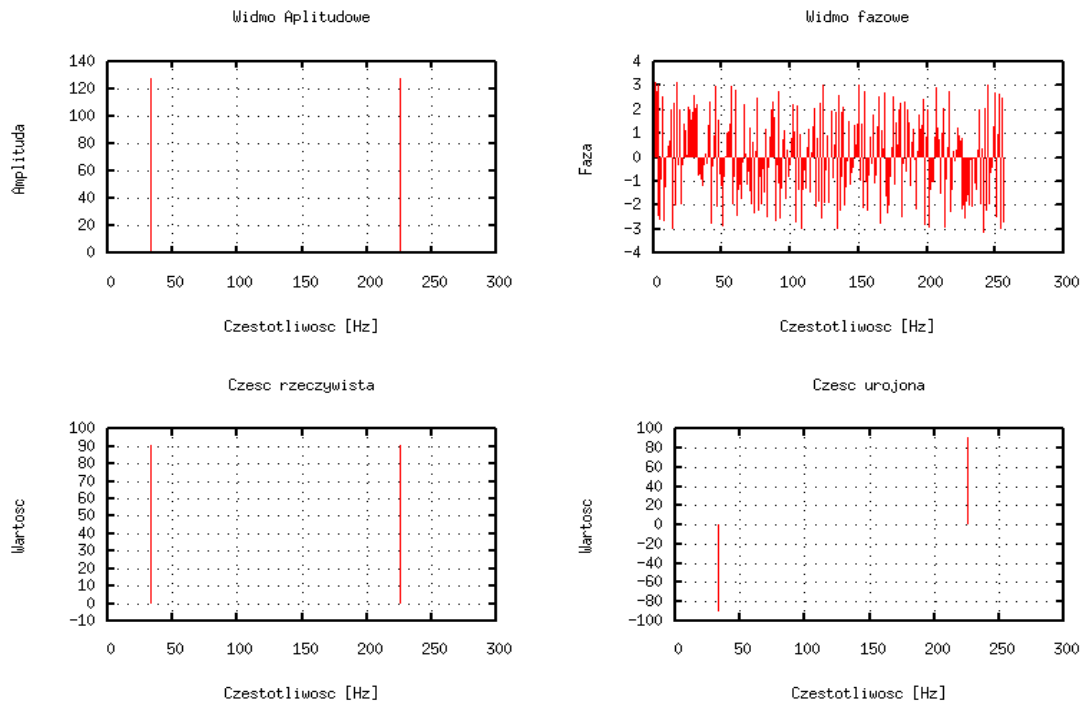
Wykres 8: Sygnał z dołożonymi czterema zerami



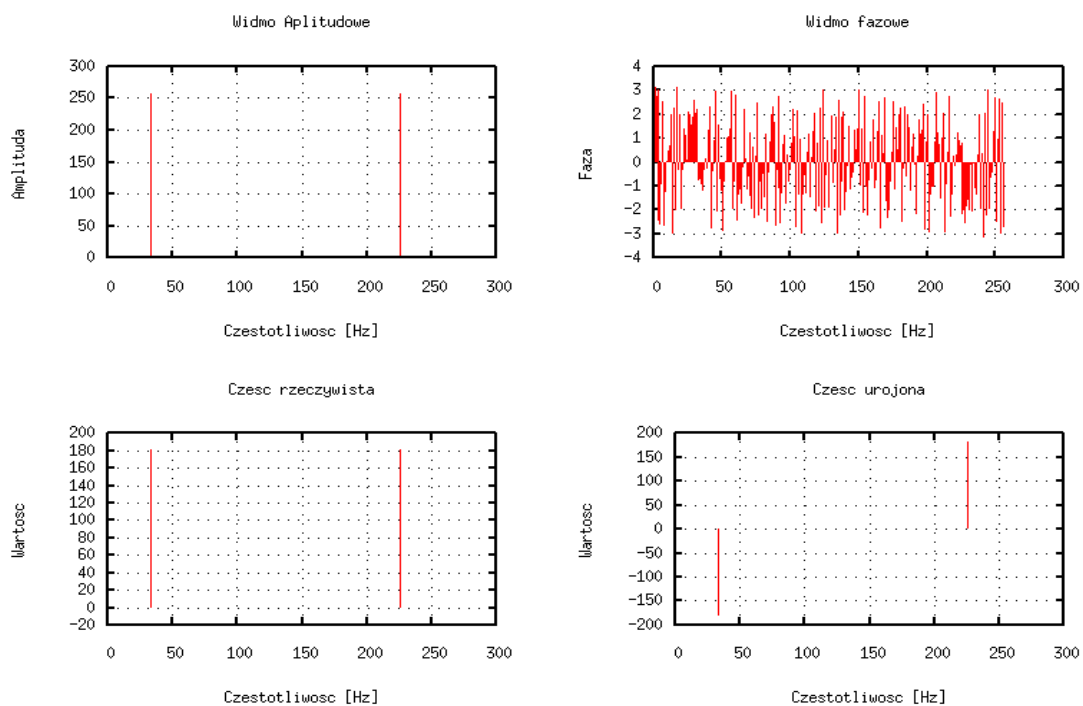
Wykres 9: Brak przecieku widma po dołożeniu zer.

Z analizy powyższych wykresów wynika, że dodanie kilku zerowych próbek na końcu badanego sygnału powoduje wzrost rozdzielczości DFT a co za tym idzie znaczne zmniejszenie się przecieku widma.

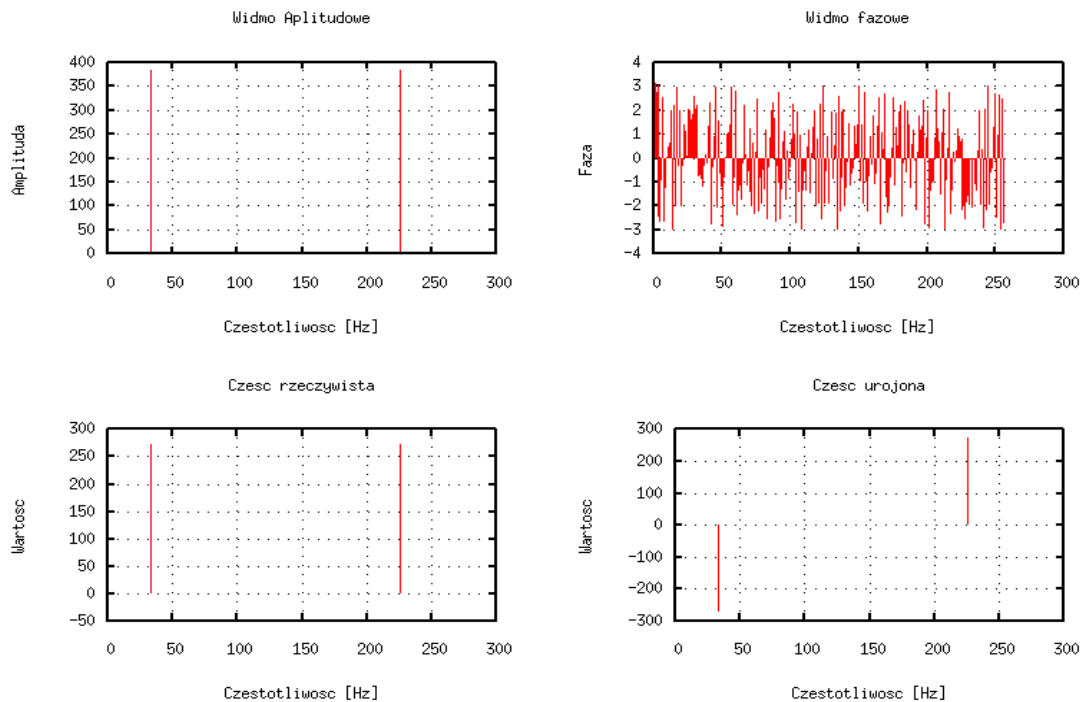
### Badanie właściwości części rzeczywistej i urojonej DFT



Wykres 10: Widma amplitudowe i fazowe oraz części Re i Im DFT dla  $A=1$ .



Wykres 11: Widma amplitudowe i fazowe oraz części Re i Im DFT dla  $A=2$ .

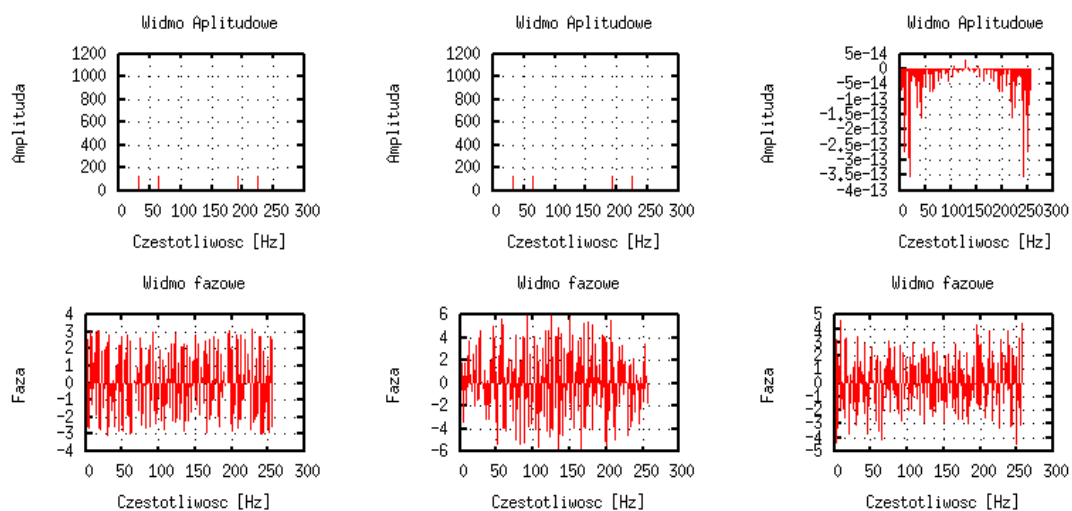


Wykres 12: Widma amplitudowe i fazowe oraz części Re i Im DFT dla  $A=3$ .

Na wykresach 10, 11, 12 przedstawiono widma amplitudowe i fazowe oraz jego część rzeczywistą i urojoną DFT sygnału sinusoidalnego ( $f=32, f_p=256, N=256$ ) dla trzech różnych amplitud:  $A=\{1,2,3\}$ . Przy zmianie amplitudy można zaobserwować wzrost wartości widma amplitudowego, jego części urojonej oraz rzeczywistej. Nie wpływa ona jednak na widmo fazy DFT. Ponadto zauważono, że dodanie do sygnału składowej stałej powoduje pojawienie się prążka  $X(0)$  a jego wartość odpowiada wartości składowej stałej.

## DFT sumy sygnałów

Ćwiczenie to polega na zbadaniu właściwości DFT dla sumy dwóch sinusoid: czy suma transformat sygnałów jest równa transformacji sumy tych sygnałów. Ponieważ przebiegi czasowe nie wpływają na określenie zachodzącego zjawiska, postanowiłem je pominąć.

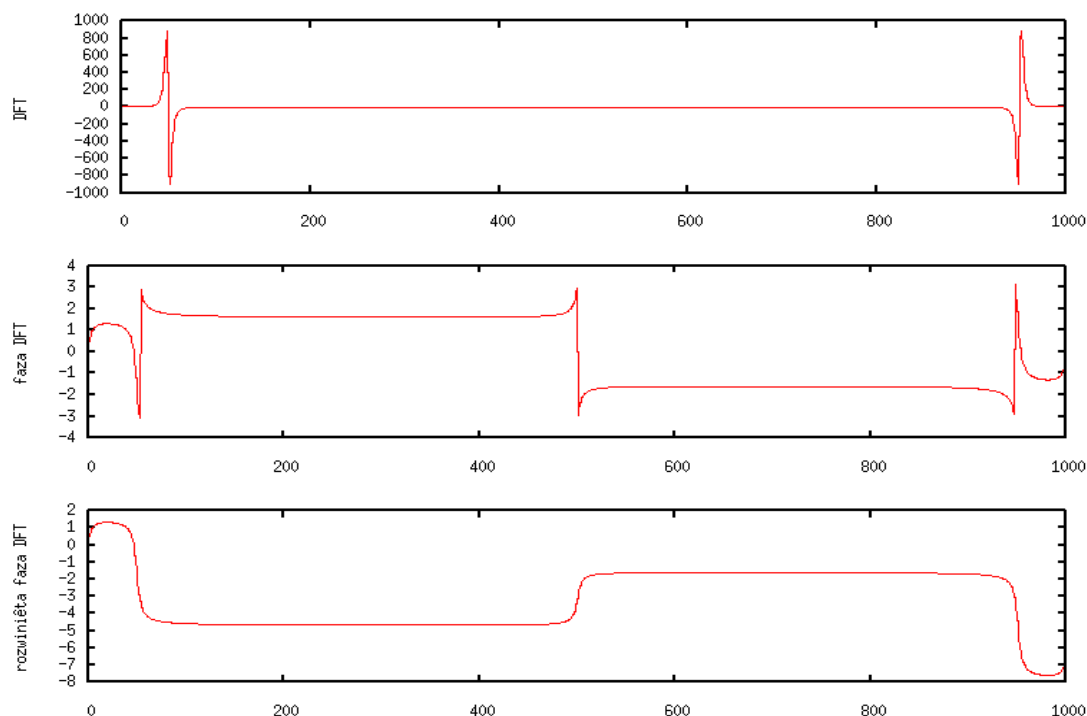


Wykres 13: Transformaty sumy, suma transformat oraz ich różnica.



Na powyższych wykresach przedstawiono widmo fazowe i amplitudowe transformaty sumy sygnałów (po lewej), sumy transformat sygnałów (na środku) oraz ich różnicę (po prawej). Z analizy wykresów ilustrujących różnicę badanych funkcji można stwierdzić (pomijając błąd “zera” na wykresie widma amplitudowego), że widmo amplitudowe DFT sumy sygnałów jest równe sumie widm amplitudowych DFT tych samych sygnałów. W analizie wykorzystano dwa sygnały sinusoidalne o dwóch różnych częstotliwościach.

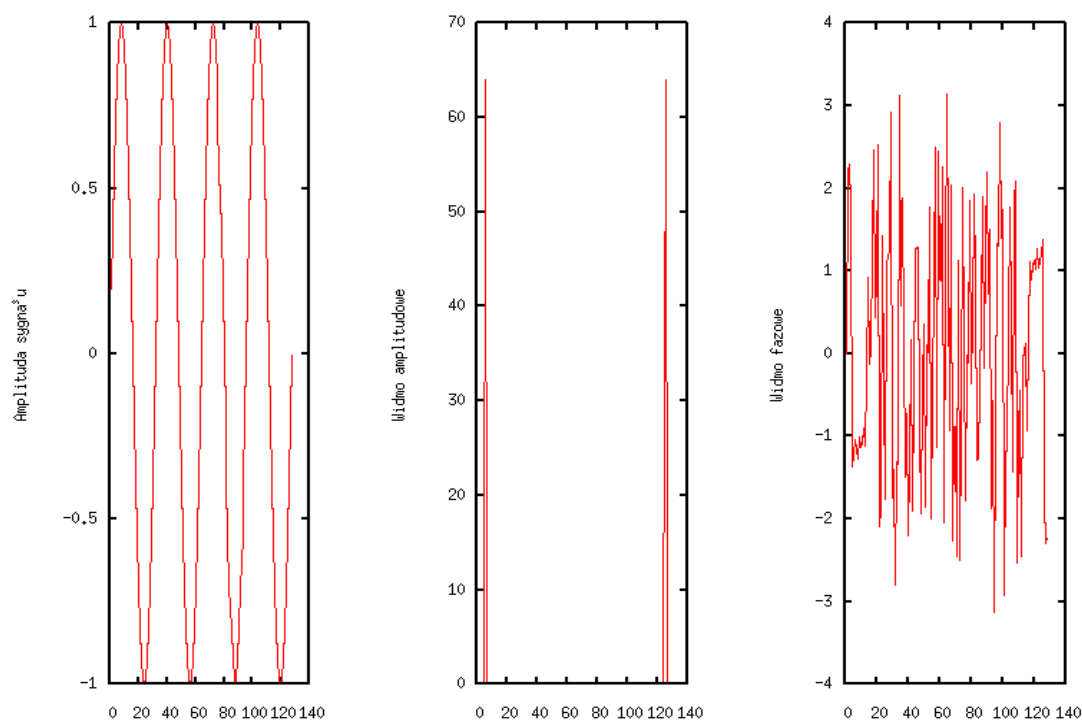
### Widmo fazowe



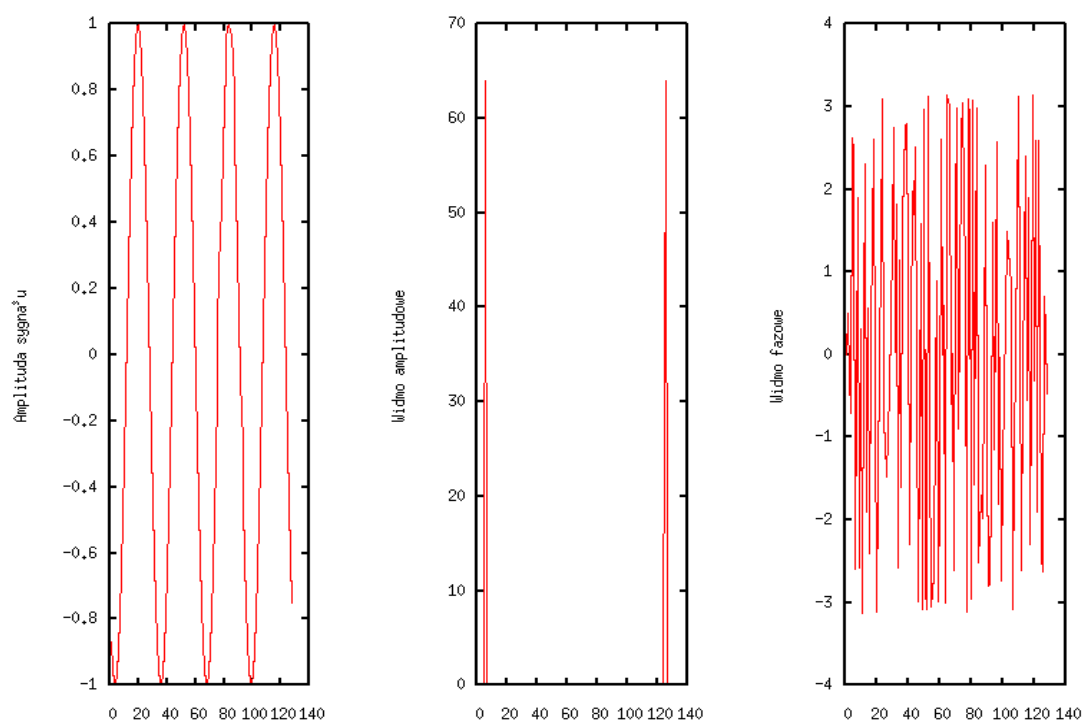
*Wykres 14: Widma amplitudowe, fazowe i fazowe z rozwinięciem.*

Na powyższych wykresach można zaobserwować wykres fazowy z rozwinięciem fazy – jest to faza znormalizowana. Dzięki tej operacji unika się powstawania zakłóceń co łatwo stwierdzić porównując dwa dolne wykresy.

## Widmo sygnału przesuniętego w czasie



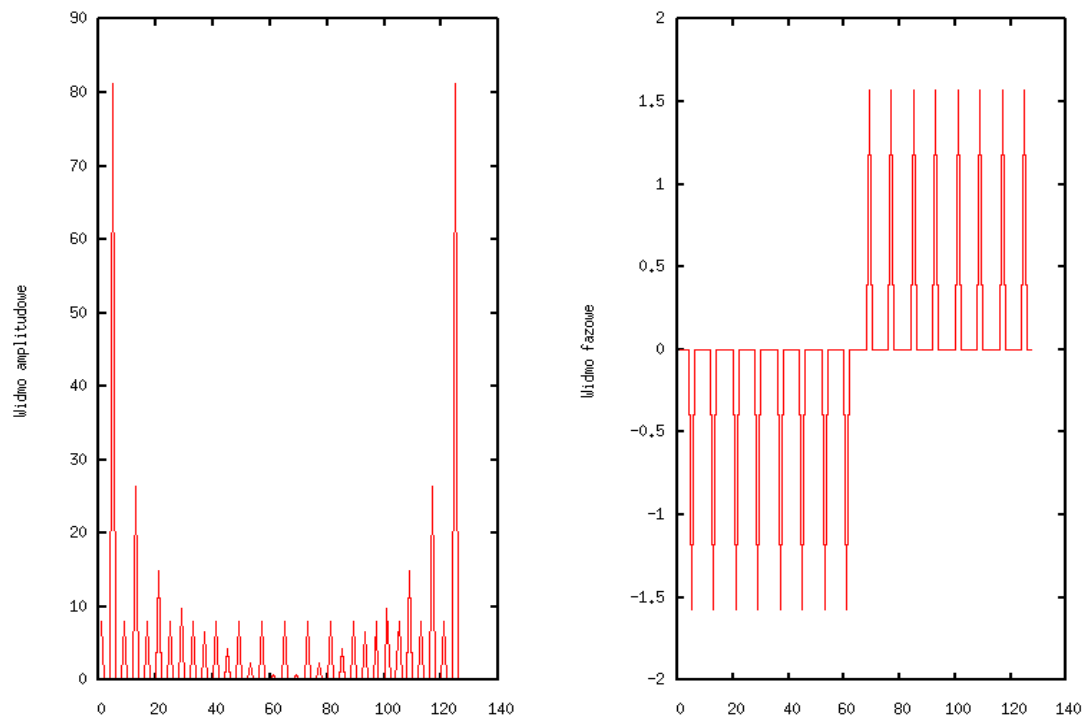
Wykres 15: Widma amplitudowe i fazowe sygnału oryginalnego



Wykres 16: Widma amplitudowe i fazowe sygnału przesuniętego w czasie ( $\Delta t = 4$ )

Jak widać przesunięcie funkcji w czasie nie wpływa na zmianę widma amplitudowego sygnału. Zmianie ulega natomiast widmo fazowe.

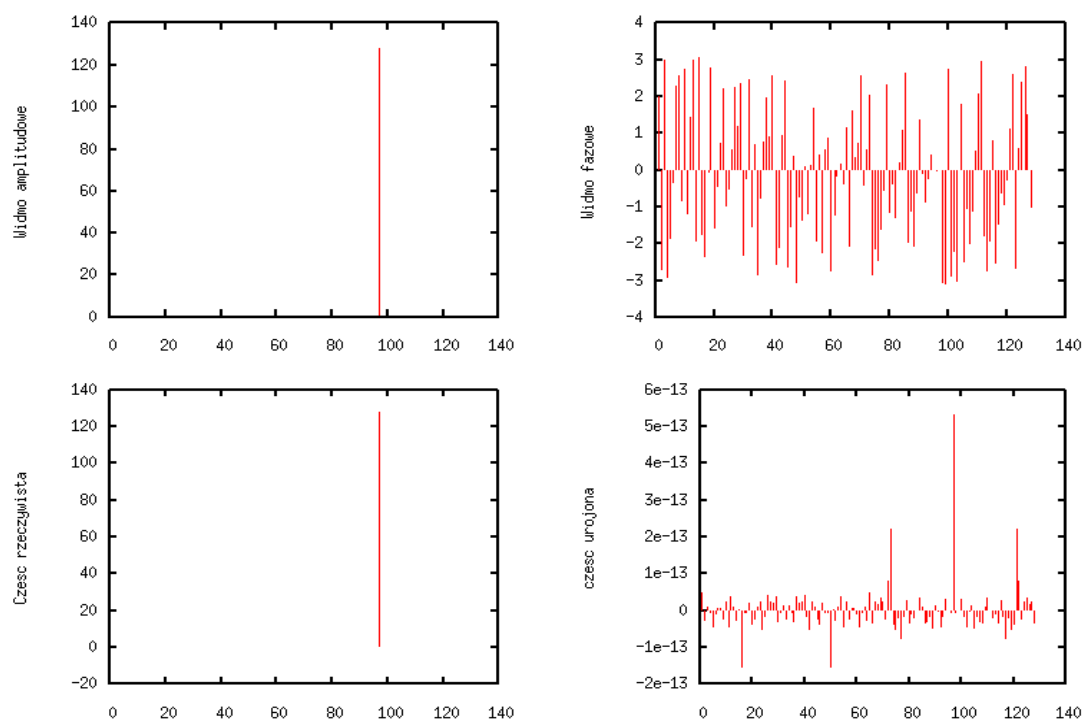
## DFT funkcji okna prostokątnego



Wykres 17: Widma amplitudowe i fazowe sygnału prost. (  $N=128, T=32, fill=0,5$  )

Transformatę wykonano dla  $f_s=128$ , wobec czego częstotliwość sygnału prostokątnego ma wartość  $f=4\text{ Hz}$ . I dla takiej wartości częstotliwości możemy zaobserwować maksimum na powyższym wykresie widma amplitudowego.

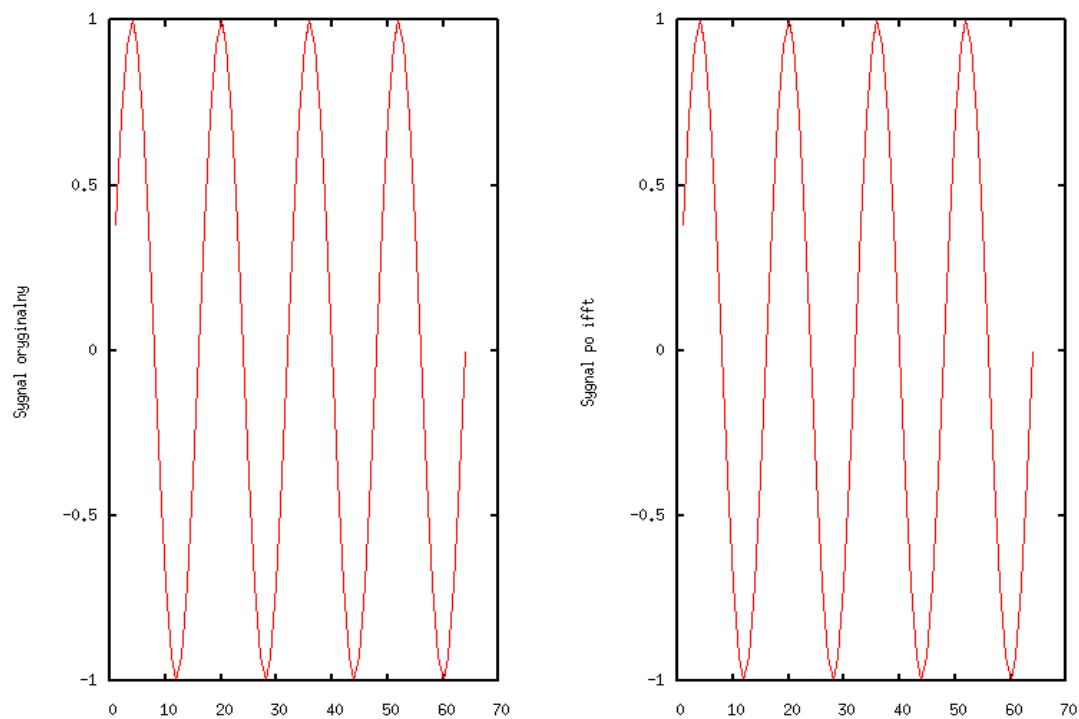
## DFT sygnału zespolonego



Wykres 18: Widma amplitudowe i fazowe oraz części Re i Im sygnału zespolonego.

Transformacie DFT poddano sygnał  $f(t) = \sin(t) + j \cdot \cos(t)$  o częstotliwości  $f = 64 \text{ Hz}$  przy dyskretyzacji z częstotliwością  $f_s = 256 \text{ Hz}$ . Jak łatwo zauważyć na powyższych wykresach dla tak dobranych parametrów wystąpił przeciek widma w jego części urojonej.

## Odwrotna dyskretna transformata Fouriera



Wykres 19: Sygnał pierwotny oraz poddany FFT a następnie IFFT

Na powyższych wykresach przedstawiono sygnał pierwotny oraz sygnał, który poddano FT a następnie zrekonstruowano go za pomocą IFT. Jak widać sygnał został odtworzony wiernie i bez widocznych zakłóceń. Parametry:  $A=1$ ,  $f=16$ ,  $f_s=256$ ,  $N=64$ .

### **Uwagi:**

Ze względu na poprawę jakości wykresów celowo zrezygnowałem z opisywania osi. Oczywistym jest, że przebiegi sygnału są przedstawione w dziedzinie czasu [s] a przebiegi widm w dziedzinie częstotliwości [Hz].